পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক প্রদত্ত উচ্চতর মাধ্যমিক ও সর্বার্থসাধক বিদ্যালয়সমূহের একাদশ শ্রেণীর পাঠ্যসূচী (Syllabus) অনুযায়ী লিখিত।

বলবিদ্যা-প্রবেশ

[একাদশ শ্রেণীর পাঠ্য]

শ্রীধীরেন্দ্ররঞ্জন ভট্টাচার্য, এম. এ.
সহকারী প্রধান-শিক্ষক
যোধপুর পার্ক বয়েজ স্কুল, কলিকাতা
ও
কলিকাতা সেণ্ট্ পল্‌স্ উচ্চতর মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের
ভূতপূর্ব সহকারী প্রধান-শিক্ষক

ইণ্ডিয়ান অ্যাসোসিয়েটেড পাবলিশিং কোং প্রাইভেট লিঃ
৯৩, মহাত্মা গান্ধী রোড, কলিকাতা ৭

প্রকাশক :
শ্রীজিতেন্দ্রনাথ মুখোপাধ্যায়
৯৩, মহাত্মা গান্ধী রোড
কলিকাতা ৭

দ্বিতীয় সংস্করণ :
ফেব্রুয়ারী ১৯৪৬.

মুদ্রাকর :
শ্রীত্রিদিবেশ বসু,
কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস
১১, মহেন্দ্র গোস্বামী লেন
কলিকাতা ৬

ভূমিকা

বলবিদ্যা-প্রবেশ তৃতীয় সোপান বাহির করিতে একটু দেরী হইয়া গেল। এক হিসাবে আবার প্রত্যেকটি সোপানই তাড়াতাড়ি বাহির হইয়াছে। কারণ, বিষয়টিকে আগাগোড়া বাংলার ছাঁচে ঢালিয়া গড়িয়া লওয়া ঠিক দু'দিনেই হয় না। সকল শিক্ষক-মহাশয়ই লক্ষ্য করিয়া থাকিবেন কয়েকটি জায়গায় দ্ব্যর্থহীন নিখুঁত কথার জন্য বেশ একটু হাতড়াইতে হয়। কারণ বোধ হয় এই যে, বাংলায় বিষয়টির পঠন-পাঠন এখনও রীতিমত দানা পাকাইয়া উঠে নাই। তাহা ছাড়া পরিভাষার ব্যাপারেও পণ্ডিতদের আরও কয়েকবার বসার দরকার আছে। কাজের বেলায় যে-সকল সমস্যা দেখা যায়, ভাবের বেলায় তাহারা আড়ালে পড়িয়া থাকে, অন্তত থাকিতে পারে। হাতে-কলমে কাজ করিতে গিয়া অসুবিধা হইলে, পরিভাষার অপূর্ণতা এই ভাবেই ব্যাখ্যা করিয়াছি। যদি শুনি এ-বিষয়ে কেহ একটা সুরাহা করার আন্তরিক চেষ্টা করিতেছেন, তবে আমাদের কয়েকটি প্রশ্ন তাঁহার সামনে রাখিব। আপাতত সাধ্যমত সমস্যার একটা সমাধান করা গেল। সমাধানটা ভালো না হইবারই কথা, তাহা আগেই গাহিয়া রাখিলাম।

তৃতীয় সোপান সম্বন্ধে বিশেষভাবে বলার কিছু নাই। অনুশীলনীর ভাষা এইবার আগাগোড়া ইংরেজীতে দেওয়া হইয়াছে। তাহার কৈফিয়ত এই যে, বাংলায় দিলে খুব কম ছেলেই তাহার ইংরেজী অনুবাদটা ভালো করিয়া পড়ে। যতদিন পর্ষৎ বাংলায় প্রশ্ন না করেন ততদিন তাই, একাদশ শ্রেণীতে অন্তত, পুরাপুরি ইংরেজী প্রশ্নের সঙ্গেই মোকাবিলা করা ভালো। সত্যিই ভালো কিনা সে-বিষয়ে বহুজনের পরামর্শ প্রার্থনা করি।

শেষ কথা এই : বইটির ভালোমন্দ শিক্ষক-মহাশয়রা নিশ্চয় বিচার করিবেন। যদি তাঁহাদের কেহ দয়া করিয়া মন্দের দিকটাই সমালোচনা করিয়া জানান তবে চিরকৃতজ্ঞ থাকিব। ইতি

সেণ্ট্ পল্‌স্ স্কুল, কলিকাতা

শ্রীধীরেন্দ্ররঞ্জন ভট্টাচার্য

সূচীপত্র

বিষয়

অষ্টাদশ পরিচ্ছেদ

ঊনবিংশ পরিচ্ছেদ

বলবিদ্যা-প্রবেশ

তৃতীয় সোপান

পঞ্চদশ পরিচ্ছেদ

কার্য, ক্ষমতা ও শক্তি (Work, Power & Energy)

১০৩। **কার্য (Work)ঃ** একটি বস্তুর উপর একটি বল কাজ করিতেছে বলিলে সাধারণভাবে আমরা এই বুঝি যে, ঐ বল হয় বস্তুটিকে নড়াইতেছে, নয়তো নড়াইবার চেষ্টা করিতেছে। কিন্তু বলবিদ্যার বিচারে নড়াইবার চেষ্টা, এমনকি নড়াইলেও সবসময় কাজ করা হয় না। এখানে প্রযুক্ত বলের অভিমুখে বলের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ হইলেই মাত্র কার্য সম্পন্ন হইল বলিয়া ধরা হয়। কাজেই বলবিদ্যার ভাষায় কার্য কথাটির একটি বিশেষ অর্থ আছে। নিচে উহার সংজ্ঞা দেওয়া হইল।

কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের প্রয়োগ-বিন্দু যদি একটা সময় পরে ঐ বলেরই দিকে (একই মুখে বা বিপরীত মুখে) সরিয়া যায় তবে কার্য সম্পন্ন হয় এবং ঐ বল ও উহার দিকে প্রয়োগ-বিন্দুর সরণের গুণফল দ্বারা উক্ত কার্যের পরিমাপ সূচিত হয়।

Work is said to be done when the point of application of a force acting on a body for any time, moves in or opposite to the direction of the force and is measured by the product of the force and the displacement of its point of application in its direction.

উদাহরণস্বরূপ, (i) P বলটি যেন A কণাটির উপর AB বরাবর সক্রিয়। ইহার ফলে Pএর প্রয়োগ-বিন্দু A যেন ১১৩(ক) চিত্রের মতো C বিন্দুতে

সরিয়া গিয়াছে তাহা হইলে প্রযুক্ত বলের দিকে একই মুখে সরণ এখানে AC।

A C B

১১৩(ক) নং চিত্র

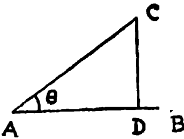
B

১১৩(খ) নং চিত্র

কাজেই কার্যের পরিমাণ এখানে P.AC একক।

(ii) আবার ১১৩(খ) চিত্রের মতো P বলের AB মুখে ক্রিয়া সত্ত্বেও উহার প্রয়োগ-বিন্দু যদি বিপরীত মুখে C বিন্দুতে সরিয়া যায় তবে সরণ হয় $-AC$ এবং সেই কারণে কার্যের পরিমাণ হইবে, $-P.AC$ একক। এইরূপ ক্ষেত্রে P বলের বিরুদ্ধে কার্য সম্পন্ন হইয়াছে বলা হয়। ভারী একটা জিনিসকে যখন উপরে তোলা হয় তখন উহার ভারের বিরুদ্ধে কার্য হয়।

(iii) অনেকসময় প্রযুক্ত বলের দিকে (একই মুখে বা বিপরীত মুখে) না সরিয়া প্রয়োগ-বিন্দুটি অন্যদিকে সরিয়া যাইতে পারে। ১১৩(গ) চিত্রের মতো AB মুখে P বলের ক্রিয়া সত্ত্বেও উহার প্রয়োগ-বিন্দু A যেন খানিক বাদে AB রেখার সহিত θ কোণে বাঁকিয়া C বিন্দুতে সরিয়া গিয়াছে। এক্ষেত্রে কার্যের পরিমাণ কি হইবে? সংজ্ঞা অনুসারে, প্রযুক্ত বল ও ঐ প্রযুক্ত বলেরই দিকে উহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণের গুণফলই কার্যের পরিমাণ। CD যেন ABএর উপর লম্ব। তাহা হইলে, এখানে A বিন্দু C বিন্দুতে স্থানান্তরিত হইয়াছে বটে, কিন্তু (প্রযুক্ত বলের দিকে) AB বরাবর এই A বিন্দুর প্রকৃত সরণ হইয়াছে $AD = AC$ কস θ পরিমাণ। সুতরাং এখানে **কার্যের পরিমাণ = প্রযুক্ত বল × প্রযুক্ত বলের দিকে সরণ = $P.AD = P.AC$ কস θ = বল × বলের ক্রিয়া-রেখা বরাবর উহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণের বিশ্লেষিতাংশ** অথবা, **ঐ কার্যের**



১১৩(গ) নং চিত্র

পরিমাণ = P.AC কস θ = AC.P কস θ = **বলের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ × সরণের দিকে বলের বিশ্লেষিতাংশ।**

পূর্ব্বে এক জায়গায় বলা হইয়াছে যে, বলের ক্রিয়ায় বস্তুবিশেষ নড়িলেও সবসময় যথাবিহিত কার্য সম্পন্ন হয় না। এইবার তাহার অর্থ বুঝা যাইবে। একটা বলের ক্রিয়ায় একটা বস্তু যেন নড়িল। কিন্তু খানিক বাদে ঐ বস্তুর উপরিস্থ বলের প্রয়োগ-বিন্দুটি যদি নড়িয়া-চড়িয়া আগের জায়গাতেই ফিরিয়া আসে তবে উহার সরণ হইল না; অথবা উহার সরণ হইল শূন্য। কাজেই, তখন কার্যের পরিমাণ হইল, বল × বলের দিকে উহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ = বল × 0 = 0। অর্থাৎ এরূপ ক্ষেত্রে কিছুমাত্র কার্যই হইল না।

আবার ১১৩(গ) চিত্র অনুসারে কার্য = AC.P কস θ। এখন $\theta = 90°$ হইলে কস $\theta = 0$, কাজে কাজেই, কার্য = AC.P × 0 = 0। অর্থাৎ বলের প্রয়োগ-বিন্দু যখন ঐ বলের দিকের সহিত 90° কোণে সরিয়া যায় তখনও কোন কার্য সম্পন্ন হয় না।

১০৩·১। কার্যের একক: (ক) স্থিতীয় বা মহাকর্ষজ মান (Unit of Work : Statical or Gravitational Unit):

(i) এক একক ভারের সমান একটি বল উহার প্রয়োগ-বিন্দুকে নিজদিকে এক একক দূরত্ব পর্যন্ত অপসারিত করিতে যেটুকু কার্য সম্পন্ন করে তাহাই কার্যের স্থিতীয় বা মহাকর্ষজ একক।

(ii) সুতরাং 1 পাউণ্ড ভারের সমান বল উহার নিজদিকে উহার প্রয়োগ-বিন্দুকে 1 ফুট সরাইতে যে পরিমাণ কার্য করে তাহাই F.P.S.-পদ্ধতিতে কার্যের স্থিতীয় বা অভিকর্ষজ একক। ইহাকে **ফুট-পাউণ্ড একক** বলে।

(iii) সেইরূপ, 1 গ্রাম ভারের সমান বল নিজদিকে উহার প্রয়োগ-বিন্দুকে 1 সেণ্টিমিটার দূরে অপসারিত করিতে যে পরিমাণ কার্য করে তাহাই C.G.S.-পদ্ধতিতে বলের স্থিতীয় বা মহাকর্ষজ একক। ইহা **গ্রাম-সেণ্টিমিটার একক** নামে পরিচিত।

(খ) কার্যের পরম বা গতীয় একক (Absolute or Dynamical unit of work):

(i) এক পরম বা গতীয় একক বল নিজদিকে উহার প্রয়োগ-বিন্দুকে

এক একক দূরে সরাইয়া লইতে যে পরিমাণ কার্য করে তাহাই কার্যের পরম বা গতীয় একক।

(ii) স্পষ্টতই, ইংরেজী পদ্ধতিতে এক পাউণ্ড্যাল বল উহার প্রয়োগ-বিন্দুকে নিজদিকে এক ফুট দূরে সরাইতে এক একক পরম বা গতীয় একক কার্য করে। ইহাকে এক **ফুট-পাউণ্ড্যাল** বলা হয়।

(iii) সেইরূপ, ফরাসী পদ্ধতিতে এক ডাইন বল উহার প্রয়োগ-বিন্দুকে ঐ বলেরই দিকে এক সেণ্টিমিটার অপসারিত করিতে এক পরম বা গতীয় একক কার্য করে। ইহাকে এক **আর্গ (erg)** বলা হয়।

বলা বাহুল্য যে, এই আর্গ পরিমাণে অত্যন্ত ক্ষুদ্র। সেইজন্য এক আর্গের এক কোটিগুণ পরিমাণ কার্যকে বৃহত্তর একক হিসাবে গণ্য করা হয়। এই একক এক **জুল (joule)** নামে অভিহিত।

স্পষ্টতই, 1 জুল $=10^7$ আর্গ।

১০৩২। দুই এককের সম্বন্ধঃ (ক) ফুট-পাউণ্ড ও ফুট-পাউণ্ড্যালঃ

আমরা জানি যে,

1 পাউণ্ডভার = 32 পাউণ্ড্যাল (প্রায়)।

∴ **1 ফুট-পাউণ্ড = 32 ফুট-পাউণ্ড্যাল** (প্রায়)।

(খ) গ্রাম-সেণ্টিমিটার ও আর্গঃ

আবার যেহেতু, 1 গ্রামভার = 981 ডাইন (প্রায়)

সেইহেতু, **1 গ্রাম-সেণ্টিমিটার = 981 আর্গ** (প্রায়)।

(গ) ফুট-পাউণ্ড্যাল ও আর্গ, ফুট-পাউণ্ড ও জুলঃ

(i) আমরা জানি,

1 পাউণ্ড্যাল = 13800 ডাইন (প্রায়),

এবং 1 ফুট = 30·48 সেণ্টিমিটার (প্রায়)।

সুতরাং, **1 ফুট-পাউণ্ড্যাল** = 30·48 × 13800 আর্গ

= **420624 আর্গ** (প্রায়)।

(ii) আবার, **1 ফুট-পাউণ্ড** = 32 ফুট-পাউণ্ডাল

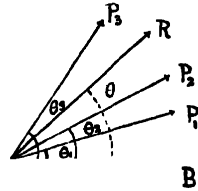
$= 32 \times 420624$ আর্গ

$= \frac{32 \times 420624}{10^7}$ জুল

= **1·346 জুল** (প্রায়)।

১০৪। একই সমতলে সক্রিয় কয়েকটি বলের ক্রিয়ায় একটি বস্তুকণার যদি খানিক সরণ হয় তবে ঐ বলসমূহ-কৃত কার্যের বৈজিক সমষ্টি উহাদের (বলগুলির) লব্ধির দ্বারা কৃত কার্যের সমান হয়। (If a particle acted upon by a number of coplanar forces has a displacement, the algebraic sum of the works done by those forces will be equal to the work done by their resultant.)

A বস্তুকণাটি যেন AB রেখার সহিত যথাক্রমে $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ প্রভৃতি কোণে সক্রিয় একই সমতলস্থিত P_1, P_2, $P_3, \ldots$ প্রভৃতি বলের ক্রিয়ায় খানিক পরে B বিন্দুতে নীত হয়। উক্ত বলগুলির লব্ধি R যেন AB রেখার সহিত θ কোণে সক্রিয়। তাহা হইলে, বলগুলি দ্বারা কৃত কার্যের বৈজিক সমষ্টি



১১৪নং চিত্র

$= P_1 . AB$ কস $\theta_1 + P_2 . AB$ কস $\theta_2 + P_3 . AB$ কস $\theta_3 + \cdots$

$= AB (P_1$ কস $\theta_1 + P_2$ কস $\theta_2 + P_3$ কস $\theta_3 + \cdots\cdots)$

$= AB \times AB$ বরাবর বলগুলির বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি

$= AB \times AB$ বরাবর ঐ বলগুলির লব্ধি Rএর বিশ্লেষিতাংশ

$= AB . R$ কস θ

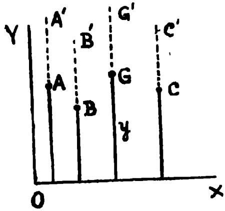
$= R . AB$ কস $\theta = R$ লব্ধি-কৃত কার্য।

১০৫। কতকগুলি বস্তুকণার সমবেত ওজন যদি W হয় এবং তাহাদের ভারকেন্দ্র যদি h একক উচ্চতায় উত্তোলিত হয় তবে ঐ বস্তুকণাসমূহ উচ্চে উত্তোলনের জন্য Wh পরিমাণ কার্য সম্পন্ন হয়। (If W be the total weight of a number of particles and if the centre of gravity of those be raised through a distance of h units, then the work done will be Wh units.)

কতকগুলি বস্তুকণার ভারকেন্দ্র যেন G হইতে G′ বিন্দুতে h একক উচ্চে উত্তোলিত হইয়াছে। বস্তুকণাগুলির ওজন যথাক্রমে যদি w_1, w_2, w_3 প্রভৃতি হয়, তবে কল্পনানুসারে,

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots\cdots\cdots$$ ইত্যাদি।

OX অনুভূমিক তল হইতে উপরদিকে উহাদের প্রাথমিক অবস্থান যথাক্রমে A, B, C প্রভৃতি দ্বারা এবং অন্তিম অবস্থান যথাক্রমে A′, B′, C′ প্রভৃতি দ্বারা যেন সূচিত। OX হইতে A, B, C প্রভৃতি বিন্দুর উল্লম্ব-দূরত্ব যথাক্রমে যদি y_1, y_2, y_3 প্রভৃতি হয় এবং OX হইতে কণাগুলির ভারকেন্দ্র G বিন্দুর উল্লম্ব-দূরত্ব যদি হয় y, তবে স্পষ্টতই



১১৫নং চিত্র

$$Wy = w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 + \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$ (অনুচ্ছেদ ৮৯)

আবার OX হইতে A′, B′, C′ প্রভৃতির এবং G′ বিন্দুর উল্লম্ব-দূরত্ব যথাক্রমে y'_1, y'_2, y'_3,……… ইত্যাদি এবং y' হইলে,

$$Wy' = w_1y'_1 + w_2y'_2 + w_3y'_3 + \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিলে,

$$W(y' - y) = w_1(y'_1 - y_1) + w_2(y'_2 - y_2) + w_3(y'_3 - y_3) + \cdots\cdots$$

কল্পনা অনুসারে ভারকেন্দ্র h একক উচ্চে উত্তোলিত হইয়াছে।

$$\therefore \quad y' - y = h.$$

$$Wh = w_1(y'_1 - y_1) + w_2(y'_2 - y_2) + w_3(y'_3 - y_3) + \cdots\cdots\cdots$$

এখানে $y'_1 - y_1$, $y'_2 - y_2$, $y'_3 - y_3$ প্রভৃতি w_1, w_2, w_3 প্রভৃতি যথাক্রমে যতটুকু উচ্চে উঠিয়াছে তাহাই সূচিত করে। কাজেই $w_1(y'_1 - y_1)$, $w_2(y'_2 - y_2)$ প্রভৃতি কণাগুলি দ্বারা কৃত কার্যের পরিমাণ সূচিত করে।

অতএব ঐ কার্যসমূহের বৈজিক সমষ্টি $= Wh$.

১০৬। বল-সরণ লেখ দ্বারা কার্যের পরিমাপ : সময়-বেগ লেখের ন্যায় বল ও সরণের লেখ আঁকিলে ক্ষেত্রফল দ্বারা কার্যের

পরিমাপ করা যায়। বল যখন পরিবর্তনশীল হয় তখন এই উপায়েই কার্যের পরিমাপ সহজসাধ্য।

OX ও OY এই দুইটি লম্বচ্ছেদী রেখাকে অক্ষ ধরিয়া OY বরাবর ক্রমবর্ধমান বল এবং OX বরাবর বলের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ ধরিলে যেন AB লেখটি পাওয়া যায়।

বলের মান যখন MP প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ তখন যেন OM এবং বলের মান যখন NQ তখন যেন প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ ON। এখন N ও M বিন্দু দুইটি যদি এত নিকটবর্তী হয় যে, প্রয়োগ-বিন্দুর MN পরিমাণ সরণকালে বলটির বৃদ্ধি নগণ্য হয় অর্থাৎ ঐ সময়ে বলটির মান প্রায় অপরিবর্তিত থাকে, তবে

B

O M N C

১১৬নং চিত্র

কার্য = বল × সরণ ; সূত্র অনুসারে

এখানে কার্য = MP × MN

= PN ক্ষেত্র।

M ও N অত্যন্ত নিকটবর্তী বলিয়া P ও Q প্রায় গায়ে গায়ে অবস্থিত বলা যায়। সেক্ষেত্রে PN আয়তক্ষেত্র কার্যত PMNQ ক্ষেত্রের সমান হইয়া পড়ে। এইরূপে O হইতে C পর্যন্ত প্রয়োগ-বিন্দুর সমগ্র সরণের বেলাতেও সমগ্র OABC ক্ষেত্রই কার্যের আসন্ন পরিমাণ সূচিত করিবে।

১০৭। ক্ষমতা (Power) :

(ক) সংজ্ঞা : কার্য সম্পাদনের হারকে **ক্ষমতা** বলে।

অশ্বাদি জীব বা যন্ত্রপাতি বা অন্য যে-কোন কর্তা (অর্থাৎ যাহা-কিছু কার্য সম্পাদন করে) অনবচ্ছিন্নভাবে এক একক সময়ে যেটুকু কার্য সম্পাদন করিতে পারে তাহাই উহার ক্ষমতার পরিমাপ।

(খ) ক্ষমতার মহাকর্ষজ একক (Gravitational Unit of Power) :

(i) ব্রিটিশ বা ইংরেজী পদ্ধতিতে অনবচ্ছিন্নভাবে এক সেকেণ্ডে এক ফুট-প্যাউণ্ড কার্য করার ক্ষমতাকে ক্ষমতার অভিকর্ষজ একক ধরা হয়। এই পদ্ধতিতে

প্রতি সেকেণ্ডে 550 ফুট-পাউণ্ড একক কার্য-ক্ষমতা এক **অশ্ব-ক্ষমতা** নামে পরিচিত। ইংরেজীতে ইহা **Horse-power** বা সংক্ষেপে H. P. নামে অভিহিত।

সর্বপ্রথম এই একক নির্বাচন করেন স্কটল্যাণ্ডবাসী জেমস্ ওয়াট্ সাহেব। তিনি দেখেন যে, একটি ভালো ঘোড়া খনি হইতে মিনিটে 150 পাউণ্ড পরিমাণ কয়লা সোজা 220 ফুট উচ্চে টানিয়া তুলিতে পারে। তাহা হইলে একটি ঘোড়া 1 মিনিটে 150×220 বা 1 সেকেণ্ডে $\frac{150 \times 220}{60}$ বা 550 ফুট-পাউণ্ড কার্য করিতে পারে। সেকেণ্ডে এই পরিমাণ কার্য-ক্ষমতাকে তিনি এক অশ্ব-ক্ষমতা নাম দেন। প্রকৃতপক্ষে অশ্বমাত্রেরই এত ক্ষমতা নাই। সাধারণ অশ্বের গড় ক্ষমতা এক অশ্ব-ক্ষমতার তিন-চতুর্থাংশের কাছাকাছি।

(ii) ফরাসী পদ্ধতিতে অনবচ্ছিন্নভাবে এক সেকেণ্ডে এক গ্রাম-সেন্টিমিটার পরিমাণ কার্য-সম্পাদনের ক্ষমতাকে একক ধরা হয়।

(গ) ক্ষমতার পরম একক (Absolute unit of work) ঃ ব্রিটিশ পদ্ধতিতে সেকেণ্ডে অনবচ্ছিন্নভাবে এক ফুট-পাউণ্ড্যাল কার্য-সম্পাদনের ক্ষমতাকে একক ধরা হয়।

ফরাসী পদ্ধতিতে সেকেণ্ডে অনবচ্ছিন্নভাবে এক আর্গ কার্য করিবার ক্ষমতাকে এক একক ক্ষমতা বলে। এই পদ্ধতিতে সেকেণ্ডে এক জুল কার্য করিবার ক্ষমতাকে বলে এক ওয়াট্ (watt).

(ঘ) অশ্ব-ক্ষমতা ও ওয়াটের সম্পর্ক ঃ

1 অশ্ব-ক্ষমতা = 550 ফুট-পাউণ্ড একক

= $550 \times 32{\cdot}2$ ফুট-পাউণ্ড্যাল [$\because g = 32{\cdot}2$ ফু./সে^{2}.]

= $550 \times 32{\cdot}2 \times 30{\cdot}48 \times 13800$ আর্গ

[$\because$ 1 ফুট = $30{\cdot}48$ সে. মি.

এবং 1 পাউণ্ড্যাল = 13800 ডাইন।]

$$= \frac{550 \times 32{\cdot}2 \times 30{\cdot}48 \times 13800}{10^7}$$

বা **746** ওয়াট্ (প্রায়)।

১০৮। ক্ষমতা, বল ও বেগের সম্পর্ক :

সংজ্ঞা অনুসারে—

ক্ষমতা = প্রতি একক সময়ে কৃত কার্য
= প্রতি একক সময়ে (বল × সরণ)
= বল × প্রতি একক সময়ে সরণ
= বল × সরণের হার
= **বল × বেগ।**

কোন যন্ত্র বা কর্মকর্তার যদি x একক অশ্ব-ক্ষমতা থাকে তবে প্রতি সেকেণ্ডে উহা $550x$ ফুট-পাউণ্ড কার্য সাধন করিতে পারে। সেক্ষেত্রে—

$$550x = \text{বল} \times \text{বেগ}\,; \quad \therefore \quad x = \frac{\text{বল} \times \text{বেগ}}{550}$$

অর্থাৎ যন্ত্রবিশেষের **অশ্ব-ক্ষমতা** $= \dfrac{\textbf{বল} \times \textbf{বেগ}}{\mathbf{550}}$।

উদাহরণমালা

(১) A truck is dragged horizontally on a level surface through a distance of 20 ft. by a force of $\frac{1}{10}$ ton. (i) What is the work done ? (ii) If the weight of the truck be $\frac{1}{5}$ ton, how far will it move in 5 secs. and what amount of work, then, will have been done ?

(i) কার্য = বল × বলের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ

$= \frac{1}{10} \times 2240 \times 20$ ফুট-পাউণ্ড $= 4480$ ফুট-পাউণ্ড।

(ii) এখানে বল $= \dfrac{2240}{10} \times 32$ পাউণ্ড্যাল। $\therefore$ $P = mf$ সূত্রানুসারে,

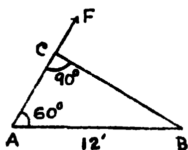
$$224 \times 32 = \frac{1}{5} \times 2240f \quad \text{বা} \quad f = \frac{224 \times 32 \times 5}{2240} \text{ বা } 16 \text{ ফু/সে}^2\,;$$

$\therefore$ $S = \frac{1}{2}ft^2$ সূত্র অনুসারে ট্রাকখানি 5 সেকেণ্ডে $\frac{1}{2} \times 16 \times 25$ বা 200 ফুট দূরে সরিয়া যাইবে।

$\therefore$ এই দূরত্ব অতিক্রমণে কার্য হইবে $\dfrac{2240}{10} \times 200$ বা 44800 ফুট-পাউণ্ড।

(২) A weight of W lbs. is pulled by a string attached to it with a force of 15 lbs. If the string make 60° with thee horizontal, what work is done in moving the weight through a distance of 12 ft. on the horizontal surface ?

A বিন্দু হইতে 12 ফুট দূরে B বিন্দুতে যেন বস্তুটি স্থানান্তরিত হয়। A হইতে ABএর সহিত 60° কোণে AC বরাবর দড়িতে 15 পাউণ্ড বলে বস্তুটিকে টানা হইতেছে। B হইতে BC যেন ACএর উপর লম্ব। সুতরাং বলের অভিমুখে প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ = AC.



১১৭নং চিত্র

∴ নির্ণেয় কার্যের পরিমাণ = 15 × AC

= 15 × 12 কস 60°

বা 15 × 12 × ½ বা 90 ফুট-পাউণ্ড।

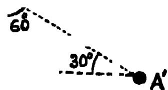
(৩) A man 140 lbs. in weight climbs 192 ft. along an incline of 1 in 16. What amount of work against gravity is done by him ?

উল্লম্বদিকে লোকটির সরণ = 192 × $\frac{1}{16}$ বা 12 ফুট।

∴ উল্লিখিত নততলে 192 ফুট উঠিতে লোকটি অভিকর্ষজ বলের বিরুদ্ধে 140 × 12 বা 1680 ফুট-পাউণ্ড কার্য করে।

(৪) A mass of 10 lbs. hanging vertically at the end of a string is pushed above till the string makes 60° with the vertical. What is the amount of work done if the string is 12 ft. long ?

দড়িটি যেন O হইতে OA বরাবর উল্লম্বভাবে ঝুলিতেছে। উহার A প্রান্তে 10 পাউণ্ড ভারটিকে ঠেলিয়া A′ বিন্দুতে উঠাইলে যেন OA′ দড়িগাছি OA উল্লম্বরেখার সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে। A′ হইতে OA-র উপর A′B যেন লম্ব।



১১৮নং চিত্র

স্পষ্টতই, অভিকর্ষজ বলের বিরুদ্ধে কৃত কার্য

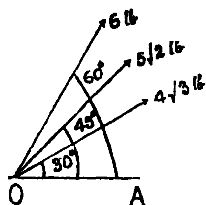
= 10 × AB

বা, 10 × (OA − OB) বা 10(12 − OA′ কস 60°)

বা, 10 × (12 − 12 × ½) বা 60 ফুট-পাউণ্ড।

(৫) Forces of 4 √3, 5 √2, 6 and 10 lbs. act at the same point of a particle at 30°, 45°, 60° and 180° respectively, with the

harizontal line along which the particle moves. If after a time, the sum of works done by the several forces comes of 60 ft-lbs., what is the displacement of the particle ?



১১৯নং চিত্র

বস্তুকণাটি যেন O হইতে A বিন্দুতে অপসারিত হয়। উহার উপর OA রেখার সহিত যথাক্রমে 30°, 45°, 60° ও 180° কোণে সক্রিয় $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, 6 ও 10 পাউণ্ড বলের এই OA রেখা বরাবর বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি

$$=(4\sqrt{3} \text{ কস } 30° + 5\sqrt{2} \text{ কস } 45° + 6 \text{ কস } 60° + 10 \text{ কস } 180°) \text{ পা.}$$

$$=(4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 6 \times \tfrac{1}{2} + 10 \times -1) \text{ পা.}$$

$$=(6+5+3-10) \text{ পা.} = 4 \text{ পা.}$$

∴ OA মোট সরণ বলিয়া ঐ বলগুলি দ্বারা কৃত কার্যের সমষ্টি,

$OA \times 4 = 60.$

∴ OA = 15 ফুট।

∴ নির্ণেয় সরণ = 15 ফুট।

(৬) A piece of brick, 10″ × 5″ × 3″, rests on its 5″ × 3″ base on the ground and then, when it is pulled up it hangs with its 10″ × 5″ base horizontal and $12\frac{1}{2}$″ above the ground. If the weight of the piece of brick be 4 lbs., what amount of work is done in raising it thus ?

ইটখানি যখন মাটির উপর 5″ × 3″ তলে খাড়াভাবে থাকে তখন উহার ভারকেন্দ্র মাটি হইতে 5″ ইঞ্চি উপরে অবস্থিত হয়। আবার উহার 10″ × 5″ তল যখন মাটি হইতে $12\frac{1}{2}$″ ইঞ্চি উপরে অনুভূমিক হয় তখন উহার ভারকেন্দ্র ঐ 10″ × 5″ তল হইতে 3″ × $\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $1\frac{1}{2}$″ ইঞ্চি ঊর্ধ্বে থাকিবে। সুতরাং মাটি হইতে ঐ ভারকেন্দ্র তখন $(12\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2})$ বা 14 ইঞ্চি উপরে অবস্থিত। কাজেই ভারকেন্দ্রের সরণ হয় (14 − 5) বা 9″ ইঞ্চি।

অতএব ইটখানিকে উল্লিখিতভাবে উপরে তুলিবার জন্য কৃত কার্য

$$=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{12}}}\times\cancel{4} \text{ বা } 3 \text{ ফুট-পাউণ্ড।}$$

(৭) A shaft, the horizontal section of which is a rectangle 10 ft. by 8 ft. is to be sunk 100 ft. into the earth. If the average weight of the soil is 150 lbs. per cubic foot, find the work done in bringing the soil to the surface. [P. U. 1935]

এখানে, আয়ত-তল গর্তটির আয়তন $=100\times 10\times 8$ ঘনফুট। এই 8000 ঘনফুট মাটির ওজন $=8000\times 150$ পাউণ্ড। ঐ 8000 ঘনফুট মাটির ভারকেন্দ্র গর্তটির মাঝামাঝি বা উপর হইতে 50 ফুট নিচে ছিল। সুতরাং গর্ত খুঁড়িবার পর এই ভারকেন্দ্র 50 ফুট উপরে উঠিয়াছে।

$\therefore$ মোট কার্য $=8000\times 150\times 50$ ফুট-পাউণ্ড

$=6\times 10^7$ ফুট-পাউণ্ড।

(৮) A railway wagon weighing 10 tons is started from rest by a horse, which exerts a constant pull of 120 lbs.-wt. The frictional resistances are 9 lbs.-wt. per ton. How far does the horse move the wagon in one minute, and at what H. P. is the horse working at the end of the minute ?

[U. P. I. Sc. 1945]

(i) গাড়ীর ওজন 10 টন, কাজেই মোট বাটা $=10\times 9$ বা 90 পাউণ্ড ;

$\therefore$ $(120-90)$ বা 30 পাউণ্ড টান গাড়ীকে গতি দিতেছে।

30 পা. $=30\times 32$ পাউণ্ড্যাল $=10\times 2240f$ [$f=$ ত্বরণ]

$\therefore$ $f=\dfrac{3\cancel{0}\times\cancel{32}}{1\cancel{0}\times\underset{70}{\cancel{2240}}}$ বা $\dfrac{3}{70}$ ফু/সে²।

$\therefore$ 1 মিনিটে ঘোড়াটি গাড়ীখানিকে $\dfrac{1}{\cancel{2}}\times\dfrac{3}{7\cancel{0}}\times 60\times\dfrac{3}{\cancel{60}}$ বা $\dfrac{540}{7}$

বা $77\frac{1}{7}$ ফুট দূরে লইয়া যাইবে

(ii) ঐ এক মিনিটের মাথায় গাড়ীখানির বেগ হয় $=\dfrac{3}{7\cancel{0}}\times 6\cancel{0}$

বা $\frac{18}{7}$ বা $2\frac{4}{7}$ ফু/সে

ঐ সময় ঘোড়ার ক্ষমতা = বল × বেগ

$= 120 \times \frac{18}{7}$ ফু-পা.

$= \frac{12\cancel{0} \times 18}{7 \times 55\cancel{0}}$

বা $\frac{216}{385}$ অশ্ব-ক্ষমতা।

(৯) A motor-car of 10 H.P. has the maximum speed 40 m.p.h. on a level track. What is the resistance of the track?

40 m. p. h. = ঘণ্টায় 40 মাইল = $\frac{40 \times 1760 \times 3}{3600}$ বা $\frac{176}{3}$ ফু/সে.

এখন, ক্ষমতা = বল × বেগ ;

$10 \times 550 =$ বাধা $\times \frac{176}{3}$

∴ নির্ণেয় বাধা $= \frac{3 \times 10 \times \cancel{550}^{50}}{\cancel{176}_{16}}$ বা $\frac{3 \times \cancel{500}^{125}}{\cancel{16}_{4}}$ বা $\frac{375}{4}$ পাউণ্ড

$= 93\frac{3}{4}$ পাউণ্ড।

(১০) A railway engine pulls a train 100 ton in weight and maintains a speed of 30 m. p. h. up an incline of 1 in 112. If the resistance due to friction and air be 1 lb. per ton, what is the horse-power exerted by the engine?

30 m. p. h. = $\frac{30 \times 1760 \times 3}{3600}$ বা 44 ফুট/সে.।

ইঞ্জিনখানি, টন প্রতি 1 পাউণ্ড হিসাবে 100×1 বা 100 পাউণ্ড বাধা এবং রেলগাড়ীর ওজনের $\frac{1}{112}$ অর্থাৎ $100 \times 2240 \times \frac{1}{112}$ বা 2000 পাউণ্ড-ভারের বিরুদ্ধে কাজ করে।

∴ মোট বাধা = (2000 + 100) পা. = 2100 পা.।

অতএব ইঞ্জিনখানি যদি x অশ্ব-ক্ষমতা প্রয়োগ করিয়া থাকে, তবে

$550x = 2100 \times 44$;

$x = \frac{210\cancel{0} \times \cancel{44}^{4}}{\cancel{550}}$ বা $\frac{\cancel{210}^{42} \times 4}{\cancel{5}}$ বা 168 একক অশ্ব-ক্ষমতা

১৯

1. A cart weighing 1 ton is dragged along a level road by a pair of bullocks with a force of 112 lbs. (i) What amount of work is done in moving it through 10 ft. ? (ii) How far will the cart move in 5 seconds and what amount of work will be done then ?

2. A crane lifts a load of 3 cwt. to a height of 12 ft. and then moving the load horizontally through 15 yds. leaves it on a railway wagon standing 8 ft. above the ground. What work is done against gravity ?

3. A heavy box is pulled through $10\sqrt{3}$ ft. with a force of 12 lbs.-wt. making 30° with the direction of the moving box. What work is done ?

4. Five bricks, each of thickness 3 in. and weight 10 lbs. are lying flat on the ground. Find the work done in pulling them one over another. [H. S. B. S. E. 1960]

5. A load is suspended vertically by a uniform wire rope 80 ft. long. If the rope weighs $\frac{1}{2}$ lb. per ft. and if the total work done in winding the whole of the rope along with the load be 9600 ft.-lbs., what is the weight of the load ?

[সংকেত : তারের দড়িটির ভারকেন্দ্র উহার দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দুতে অর্থাৎ 40 ফুট নিচে। উহার মোট ওজন বাহির কর এবং এই ওজন 40 ফুট উপরে তুলিতে কৃত কার্য মোট কার্য হইতে বাদ দাও। ইত্যাদি।]

6. Find how many ft.-lbs. of work is done in pushing a mass of 10 lbs. through 5 ft. up a smooth incline of 1 in 10. [C. U. 1921]

7. A rickshaw-puller pulls his rickshaw carrying a man 140 lbs. in weight, up a slope of a bridge 1 in 20. If the rickshaw itself weighs 60 lbs., and if the resistance is neglected, what work does he do in moving 50 ft. up ?

8. What amount of work does a man weighing 150 lbs. do in climbing 40 steps, each having a vertical height of 8 in. ?

9. A cyclist and his cycle are together 250 lbs. in weight. What work does he do in climbing 120 yds. up an incline of 1 in 25, assuming the resistances to be nil ?

10. A mass of 1 ton hangs by a vertical chain 13 yds. long. The weight of the chain is 8 lbs. per ft. A crane pulls the mass up till it is displaced through a horizontal distance of 36 ft. from the original vertical line of the chain, what work is done ?

11. Three forces of 20 lbs., 28 lbs. and 30 lbs. act respectively at 0°, 60° and 180° with the horizontal on a mass of body and displace it through a horizontal distance of 36 ft. (i) What is the total work done by the forces ? (ii) If the mass is 16 lbs., in what time was it displaced through 36 ft. ?

12. A well is to be made 40 ft. deep and 3 ft. in diameter. Find the work done in raising the material, supposing a cubic foot of it weighs 140 lbs. [C. U. I. Sc. 1955]

[সংকেত : কূপের ঘনফল $\pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 9 \times 40$ এবং ঐ ঘনফল পরিমাণ মাটির ওজন $= \frac{22}{7} \times 9 \times 40 \times 140$ lbs. ইহার ভারকেন্দ্র কূপের মাঝামাঝি বলিয়া উপর হইতে 20 ft. নিচে। ইত্যাদি।]

13. A shaft, whose horizontal section is a triangle with sides 3 ft., 4 ft. and 5 ft. is to be sunk 50 ft. into the earth. If the average weight of the soil is 150 lb./cu. ft., find the work done in bringing the soil to the surface. [B. H. U. 1955]

[সংকেত : এখানে গর্তটির ঘনফল = ত্রিভুজের আয়তন × 50 ঘনফুট। $5^2 = 3^2 + 4^2$ বলিয়া ত্রিভুজটি সমকোণী এবং উহার আয়তন $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ বা 6 বর্গফুট ইত্যাদি।]

14. A well, of which the section is a circle of diameter 14 ft. and whose depth is 200 ft. is full of water. Find the work done, in foot-pounds, in pumping the water to the level of the top of the well (given that wt. of 1 cu. ft. of water $= 1000$ oz. and $\pi = \frac{22}{7}$ for the purpose of simplification in calculation). [H. S. B. S. E. 1963]

15. In digging a circular well of radius 3 ft. and of depth 20 ft., 12 ft. of clay and later 8 ft. of sand were taken out. Find the work done in raising the materials to the surface, assuming that one cubic foot of clay and one cubic foot of sand weigh *a* lbs. and *b* lbs. respectively. [P. U. 1938]

16. A tower is to be built of brick-work, the base being a rectangle whose external measurements are 20 ft. by 10 ft., the height of the tower 132 ft., and the walls 2½ ft. thick.

Find the number of hours in which an engine of 3 H. P. would raise the bricks from the ground, the weight of a cubic foot of brick-work being 120 lbs. [C. U. I.Sc. 1942]

[সংকেত : দেওয়ালের ঘনফল এবং তারপর ভার নির্ণয় কর : ইহার ভারকেন্দ্র 66 ফুট উচ্চে : এই ভারকে 66 ফুট তুলিতে যে কার্য হয় তাহাই এখানে মোট কার্য। ইত্যাদি।]

17. The Darjeeling mail has a maximum speed of 60 m.p.h. If the total resistance then be the weight of 1 ton, find the horse-power of the engine. [C. U. 1932]

18. In climbing a slight incline 200 yards long an engine exerts a force 250 lbs. on the trailer. If the speed of the engine is 20 m. p. h., calculate the horse-power exerted during the climb. [W. B. S. F. 1959]

19. How many cubic feet of water will an engine of 100 H.P. raise in one minute from a depth of 150 ft. ? [U. P. B. 1949]

20. What is the H. P. required for a motor-car which weighs 3000 lbs. and can run at 30 miles an hour against an air resistance equal to $\frac{1}{80}$th of its own weight ? [C. U. 1943]

21. Find the H. P. of an engine that would empty in 10 hours a vertical shaft full of water, if the diameter of the shaft be 10 ft. and its depth 1000 ft. [C. U. 1910 ; P. U. 1936]
[1 cu. ft. of water = 62·5 lbs.]

22. Find the horse-power of an engine which can pump 3 tons of water to the top of a hill 150 ft. high in 4 minutes ? [H. S. B. S. E. 1962]

23. Calculate the H. P. of an engine which takes 20 minutes to pump out water from a rectangular well of length 20 ft., breadth 15 ft., and depth 100 ft., to the level of the top of the well. [One cubic foot of water weighs 62·5 lbs.] [C. U. 1938]

24. Calculate the H. P. of an engine which takes 15 minutes to pump out water from a cylindrical well of cross-section 120 sq. ft. and of depth 90 ft. to a level ground 14 ft. above the surface of the well. [C. U. 1941]

25. A well of which the section is a circle of diameter 14 ft. and depth 206 ft. is half full of water. Find the work done in foot-pounds in pumping out the water to a level 4 ft. above the top of the well in 10 minutes, and calculate the average horse-power of the pumping machine. [C. U. 1935]

26. An engine pumps water from a well to the ground level, which is 44 ft. above the mean level of water surface. If 6 cu. ft. of water is raised per second and two-thirds of the work of the engine is used in lifting the water, what is the power developed by the engine ? [U. P. B. 1948]

27. A car of weight 1,000 lbs. runs down a slope of 1 in 50 at a steady speed of 30 m. p. h. The effect of air resistance is equivalent to a force of 60 lb.-wt. opposing the car's motion. What horse-power is the engine developing ?

What horse-power would the engine have to develop to take the car up the same slope at the same steady speeds ?
[Oxford & Cambridge]

28. A train whose weight is 100 tons is moving up an inclined plane with a uniform speed of 45 miles per hour, inclination being 1 in 100. Find the horse-power of the engine, the resistance due to friction, etc. being $\frac{1}{80}$ of the weight.
[C. U. 1940]

29. A cyclist can maintain a speed of 10 m. p. h. on the level by working at the rate of one-tenth of a horse-power, what is the resistance to his motion in pound-weight ?

If the total weight of cyclist and bicycle is 250 lbs. and if the resistance, apart from gravity, is unaltered, what speed in miles per hour can he maintain up a slope of 1 in 80 without altering his rate of working ?
[Oxford and Cambridge Jt. Board]

30. A man is cycling at the rate of 6 miles per hour up a hill whose slope is 1 in 20 ; if the weight of the man and the machine be 200 lbs., prove that he must at the least be working at the rate of 16 H. P. [P. U. 1949]

31. A train of 300 ton is being taken up a slope of 1 in 240, against forces due to air resistance and friction of 15 lb.-wt/ton, at a steady speed of 45 m. p. h. Find the horse-power that the engine is exerting. [Oxford & Cambridge Jt. Board]

১০৯। শক্তি (Energy) : বস্তুর কার্য-সম্পাদনের সামর্থ্যকে শক্তি বলে। এই শক্তি নানাপ্রকার। বলবিদ্যায় কেবল যান্ত্রিক শক্তির কথাই আলোচ্য। যান্ত্রিক শক্তিও আবার দুইপ্রকার। কারণ, দুই কারণে বস্তুর কার্য-সাধনের সামর্থ্য জন্মায়। আমরা জানি, একটি চলমান বস্তুর গতিমুখের

বিরুদ্ধে উপযুক্ত পরিমাণ বল প্রয়োগ করিলে খানিকটা গিয়াই বস্তুটি থামিয়া যায়। ইহার অর্থ, প্রযুক্ত বলের বিপরীত মুখে উহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ হয়; অর্থাৎ ঐ বলের বিরুদ্ধে কিছুটা কার্য সম্পন্ন হয়। বস্তুটি যদি চলমান না হইয়া স্থির থাকিত এবং সেই অবস্থায় উহার উপর উল্লিখিত বল প্রয়োগ করা হইত তবে বলের অভিমুখেই উহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ হইত, এবং কিছুটা কার্যও সম্পন্ন হইত। গতি থাকিলেই মাত্র বলপ্রয়োগ সত্ত্বেও উহার বিপরীত মুখে বা বিরুদ্ধে কার্য হয়। বলের বিরুদ্ধে এইপ্রকার কার্য-সাধনের সামর্থ্য বস্তুবিশেষে গতির মধ্যেই নিহিত থাকে। তাহা হইলে গতির জন্য বস্তুর একপ্রকার শক্তি জন্মে। উহাকেই গতিশক্তি বলে। অতএব,

একটি চলমান বস্তুর মধ্যে উহার গতির জন্য যে কার্য-সাধনের সামর্থ্য নিহিত থাকে তাহাকে উহার গতি-শক্তি (Kinetic Energy) বলে। ঐ চলমান বস্তু থামিয়া যাওয়া পর্যন্ত প্রযুক্ত একটি বলের বিরুদ্ধে যেটুকু কার্য সাধন করে তাহাই উহার গতিশক্তির পরিমাপ।

গতির ন্যায় স্থিতির জন্যও বস্তুর আর একরকম শক্তি জন্মায়। একখণ্ড পাথর মাটিতে পড়িয়া আছে। সেই অবস্থায় উহার কোন কার্য-সাধনের শক্তি নাই। পাথরখণ্ডটিকে যদি একতলার ছাদে উঠাই তবে উহা নিচে আবার মাটিতে পড়া পর্যন্ত খানিকটা কার্য সাধন করিতে পারিবে। এইভাবে উহাকে যতই উপরে উঠাই ততই উহার কার্য-সাধনের শক্তি বাড়িয়া যাইবে। মাটির অবস্থানকে যদি পাথরখণ্ডের স্বাভাবিক বা প্রমাণ অবস্থান (standard position) বলা যায়, তবে পরিবর্তিত অবস্থান হইতে স্বাভাবিক অবস্থানে ফিরিয়া আসা পর্যন্ত উহার কার্য-সাধনের সামর্থ্য জন্মায়। আবার, একটি স্প্রিং সাধারণ অবস্থায় কিছুই করিতে পারে না। কিন্তু উহাকে চাপিয়া ধর, দেখিবে উহা সাধারণ অবস্থায় ফিরিয়া আসিবার ক্ষমতা রাখে। তেমনি দম দিলে ঘড়ির স্প্রিং কার্য-সাধনের সামর্থ্য লাভ করে। চাপ দিলে বা দম দিলে একটা স্প্রিং সংকুচিত হয়। সেই চাপ সরাইয়া দিলে বা দম খুলিতে থাকিলে স্প্রিংখানি আবার তাহার স্বাভাবিক বা প্রমাণ অবস্থানে (standard position) ফিরিয়া আসে। [**বস্তুর অংশসমূহের আপেক্ষিক সংস্থানকে উহার স্বরূপ (configura-**

tion) বলা যায়।] স্প্রিংখানির বেলায় দম দিলে উহার স্বাভাবিক স্বরূপ বদলাইয়া অনেক পরিমাণে সংকুচিত হয়। দম খুলিলে সেই সংকুচিত স্বরূপ আবার প্রসারিত হইয়া স্বাভাবিক স্বরূপে ফিরিয়া আসে এবং ততক্ষণে খানিকটা কাজ সাধিত হয়। **বস্তুর স্বরূপ বা অবস্থান পরিবর্তিত হইলে উহার স্বাভাবিক স্বরূপ বা অবস্থানে ফিরিয়া আসা পর্যন্ত যে একটা কার্য-সাধনের সামর্থ্য জন্মায়, তাহাকেই স্থিতি-শক্তি (Potential Energy) বলে।**

১১০। গতি-শক্তির পরিমাপ (Measure of Kinetic Energy) :

m-ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু যদি u বেগে চলমান হয় তবে উহার গতি-শক্তির পরিমাণ হয় $\frac{1}{2}mu^2$ গতীয় একক।

ধরা যাক, P পরিমাণ বলপ্রয়োগে যেন বস্তুটির u বেগ s দূরত্বের পর শূন্যে পরিণত হয়। তাহা হইলে P বলের বিরুদ্ধে বস্তুটি Ps পরিমাণ কার্য সাধন করে, কাজে কাজেই Ps-ই বস্তুটির গতি-শক্তির পরিমাপ।

এখন P বল যদি বস্তুটির উপর f মন্দন উৎপন্ন করিয়া থাকে, তবে

$$P = mf \quad \text{বা} \quad \frac{P}{m} = f\text{।}$$

$$v^2 = u^2 - 2fs \text{ সূত্র অনুসারে}$$

এখানে, $0^2 = u^2 - 2fs$

অথবা $2fs = u^2$

$$\frac{2Ps}{m} = u^2$$

$\therefore$ $Ps = \frac{1}{2}mu^2$

$\therefore$ **গতি-শক্তি $= \frac{1}{2}mu^2$.**

স্পষ্টতই, গতি-শক্তির পরিমাপ m (ভর) ও u (বেগ) এই দুইটির উপর মাত্র নির্ভর করে। উহা প্রযুক্ত বল P-এর মান-নিরপেক্ষ। দ্বিতীয়ত, Ps $= \frac{1}{2}mu^2$ সূত্রে P বা বল গতীয় এককে প্রকাশিত বলিয়া $\frac{1}{2}mu^2$ বা গতি-শক্তির মানও গতীয় এককে গণ্য করিতে হয়।

১১১। বস্তুবিশেষের গতি-শক্তির পরিবর্তন উহার উপর প্রযুক্ত বলের দ্বারা সাধিত কার্যের সমান (The change of Kinetic Energy of a body is equal to the work done by the force acting on it)।

ধরা যাক, P বলের অধীন m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর প্রারম্ভিক বেগ u এবং প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ারেখায় একই মুখে S দূরত্ব সরণের পর উহার বেগ যেন v হয়।

প্রযুক্ত বল ও সরণের মান যথাক্রমে P ও S বলিয়া,

এখানে, কার্যের পরিমাণ = PS একক।

P বলের প্রয়োগে বস্তুটির উপর f ত্বরণ উৎপন্ন হইয়া থাকিলে,

$$P = mf \quad \text{বা} \quad f = \frac{P}{m}.$$

$\therefore\ v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্র অনুসারে এখানে

$$v^2 = u^2 + 2\frac{P}{m}S \left[\because\ f = \frac{P}{m}\right]$$

বা $v^2 - u^2 = \dfrac{2PS}{m}$

বা $\dfrac{m}{2}(v^2 - u^2) = PS$

বা **$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = PS.$**

স্পষ্টতই, $\frac{1}{2}mu^2$ ও $\frac{1}{2}mv^2$ বস্তুটির যথাক্রমে প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক গতি-শক্তির মান সূচিত করিতেছে। কাজেই উহাদের অন্তরই বস্তুটির গতি-শক্তির পরিবর্তন সূচিত করিবে।

অতএব, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 =$ গতি-শক্তির পরিবর্তন

এবং PS = সাধিত কার্য।

$\therefore$ **গতি-শক্তির পরিবর্তন = সাধিত কার্য।**

গতি-শক্তির মান গতীয় এককে ধরা হয়। কাজেই এই সমীকরণে কার্যের মানও গতীয় এককে ধরিতে হয়। অর্থাৎ কার্যের মান এখানে হয় ফুট-পাউণ্ড্যালে, নয় সেণ্টিমিটার-ডাইনে প্রকাশিত।

১১২। কেবল অভিকর্ষজ বলের অধীন হইলে h উচ্চতায় অবস্থিত m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর স্থিতি-শক্তির পরিমাণ mgh একক।

বস্তুটির ভর m বলিয়া উহার উপর সক্রিয় অভিকর্ষজ বলের পরিমাণ mg একক। এই বল বস্তুটির ভরকেন্দ্রে সক্রিয় ধরা যায় এবং ইহা ভরকেন্দ্রটির h পরিমাণ সরণ করিতে সমর্থ। h পরিমাণ সরণের পর বস্তুটি উহার প্রমাণ অবস্থানে (standard position) ফিরিয়া আসিবে। সুতরাং সেক্ষেত্রে কার্যের পরিমাণ হইবে mgh একক।

অতএব h উচ্চতায় বস্তুটির স্থিতি-শক্তিরও পরিমাণ mgh একক **(গতীয়)।**

১১৩। মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর গতিপথে যে-কোন বিন্দুতে স্থিতি-শক্তি ও গতি-শক্তির সমষ্টি ধ্রুব (The sum of the potential and the kinetic energy of a freely falling body is constant throughout its motion)।

(ক) h ফুট উচ্চতা হইতে মুক্তভাবে পতনশীল m ভর-বিশিষ্ট বস্তুর পতনকালে স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব।

A

x

h উচ্চতা হইতে x ফুট পতনের পর বস্তুটির বেগ যেন v হয়। মাটি হইতে তখন উহার উচ্চতা $h-x$ ফুট।

সুতরাং $h-x$ উচ্চতায় বস্তুটির স্থিতি-শক্তি $= mg(h-x)$ (i)

১২০নং চিত্র

এবং সেই মুহূর্তে বস্তুটির গতি-শক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$

কিন্তু এখানে $v^2 = u^2 + 2gx = 2gx$

[∵ প্রারম্ভিক বেগ $= 0$]

∴ এখানে, গতি-শক্তি $= \frac{1}{2}m.2gx = mgx$ ... (ii)

∴ ঐ মুহূর্তে বস্তুটির স্থিতি-শক্তি + গতি-শক্তি

$$= mg(h-x) + mgx$$

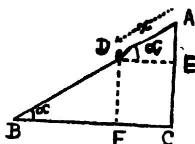
$$= mgh - mgx + mgx$$

$$= mgh.$$

স্পষ্টতই m, g ও h এখানে ধ্রুব এবং সেই কারণে mgh-ও ধ্রুব। অর্থাৎ বস্তুটির পতনকালে উহার গতিপথে যে-কোন বিন্দুতে স্থিতি-শক্তি ও গতি-শক্তির সমষ্টি ($=mgh$) ধ্রুব।

(খ) নততলের উপর দিয়া মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব।

a নতিকোণ-সম্পন্ন ABC একটি নততল। উহার শীর্ষবিন্দু A হইতে m-ভরবিশিষ্ট বস্তুটি যেন মুক্তভাবে x ফুট গড়াইয়া পড়িয়া D বিন্দুতে আসিয়াছে।



১২০ (ক) নং চিত্র

D হইতে ভূমি BC-র উপর লম্ব DF এবং DE যেন ঐ ভূমি BC-র সমান্তরাল। তাহা হইলে, D বিন্দুতে বস্তুটির ভূমি হইতে উচ্চতা = DF ফুট

= EC ফুট = (AC − AE) ফুট

= (AC − AD সাইন ADE) ফুট

= ($h - x$ সাইন a) ফুট [$\because$ $\angle$ADE $= a$]

$\therefore$ D বিন্দুতে বস্তুটির স্থিতি-শক্তি $= mg(h - x$ সাইন $a)$········ (i)

আবার, D বিন্দুতে বস্তুটির বেগ যদি v হয় তবে তখন উহার গতি-শক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$.

কিন্তু এখানে, $v^2 = u^2 + 2g$ সাইন $a.x$

[$\because$ নততল বরাবর ত্বরণ $= g$ সাইন a]

$= 2gx$ সাইন a.

$\therefore$ D বিন্দুটিতে বস্তুটির গতি-শক্তি $= \frac{1}{2}.m.2gx$ সাইন a

$= mgx$ সাইন a········ (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিলে, D বিন্দুতে বস্তুটির

স্থিতি-শক্তি + গতি-শক্তি $= mg(h - x$ সাইন $a) + mgx$ সাইন a

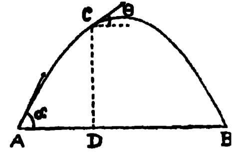
$= mgh - mgx$ সাইন $a + mgx$ সাইন a

$= mgh$, ইহা ধ্রুব।

স্পষ্টই ইহা D বিন্দুর যে-কোন অবস্থানের জন্য সত্য। সুতরাং নততল বরাবর মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব।

(গ) শূন্যে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর (Projectile) উৎপতনকালে সর্বদা স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি ধ্রুব।

m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে A বিন্দু হইতে AB অনুভূমিক তলের সহিত a কোণে u বেগে যেন উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত করা হইল। স্পষ্টতই উৎক্ষেপ-বিন্দুতে বস্তুটির বেগের অনুভূমিক বিশ্লেষিতাংশ $= u$ কস a। A বিন্দুতে সর্বপ্রথমে বস্তুটির বেগ u বলিয়া গতি-শক্তি $= \frac{1}{2}mu^2$ এবং স্থিতি-শক্তি $= 0$। সুতরাং A বিন্দুতে উহার স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি $= \frac{1}{2}mu^2$।



১২১ নং চিত্র

বস্তুটি উপরে উঠিতে উঠিতে যখন C বিন্দুতে পৌছিয়াছে তখন যদি উহার বেগ অনুভূমিক রেখার সহিত θ কোণে v হয়, তবে C বিন্দুতে উহার গতি-শক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$।

AB হইতে C বিন্দুর উচ্চতা CD যেন h একক।

এখন, C বিন্দুতে v বেগের অনুভূমিক বিশ্লেষিতাংশ $= v$ কস θ। বস্তুটির উপর কোন অনুভূমিক ত্বরণ না থাকায় A ও C বিন্দুতে উহার অনুভূমিক বেগ সমানই থাকিবে। কাজেই

$$u \text{ কস } a = v \text{ কস } \theta \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

দ্বিতীয়ত, উল্লম্বদিকে বস্তুটির গতিমুখের বিপরীত দিকে একমাত্র ত্বরণ g এবং উল্লম্ব প্রারম্ভিক বেগ u সাইন a ও প্রান্তিক বেগ v সাইন θ হওয়ায়

$v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র অনুসারে,

এখানে, $v^2 \text{ সাইন}^2\theta = u^2 \text{ সাইন}^2 a - 2gh$

$$= u^2(1 - \text{কস}^2 a) - 2gh$$

$$= u^2 - u^2 \text{ কস}^2 a - 2gh \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

(i)-হইতে উভয় পক্ষের বর্গ লইলে,

$$u^2 \text{ কস}^2 a = v^2 \text{ কস}^2\theta.$$

(ii)-এ u^2 কস$^2 a$ এর এই মান বসাইয়া,

$$v^2 \text{ সাইন}^2\theta = u^2 - v^2 \text{ কস}^2\theta - 2gh,$$

অথবা, v^2 (সাইন$^2\theta$ + কস$^2\theta$) $= u^2 - 2gh$,

অথবা, $v^2 = u^2 - 2gh$;

অতএব C বিন্দুতে বস্তুটির গতি-শক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m.(u^2 - 2gh)$
$= \frac{1}{2}mu^2 - mgh$,

এবং ঐ বিন্দুতে বস্তুটির স্থিতি-শক্তি $= mgh$.

$\therefore$ C বিন্দুতে বস্তুটির স্থিতি-শক্তি ও গতি-শক্তির সমষ্টি
$= mgh + \frac{1}{2}mu^2 - mgh = \frac{1}{2}mu^2$.

C বিন্দুর যে-কোন অবস্থানের জন্য ইহা সত্য।

$\therefore$ আরম্ভ হইতে শেষপর্যন্ত উৎপতনশীল বস্তুটির স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব ও $\frac{1}{2}mu^2$ পরিমাণ।

১১৪। সংরক্ষণশীল শ্রেণীর বল (Conservative system of forces) ঃ মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর পক্ষে যে স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব থাকে তাহা আমরা দেখিলাম। এইরূপ ক্ষেত্রে বস্তু কেবল অভিকর্ষজ বলেরই অধীন থাকে। অন্য কয়েকপ্রকার বলের অধীন হইলেও বস্তুর স্থিতি-শক্তি আর গতি-শক্তির সমষ্টি নিত্যই থাকে। তবে সকলপ্রকার বলের ক্ষেত্রেই এই কথা খাটে না। এই কথা খাটে কেবল এমন একটি বিশেষ শ্রেণীর বলের বেলায় যাহা **সংরক্ষণশীল শ্রেণীর বল** (Conservative system of forces) নামে পরিচিত। কাজেই সংরক্ষণশীল বল বলিতে কি বুঝায় তাহা প্রথমে জানা প্রয়োজন।

যে বল-সমূহের দ্বারা কৃত কার্য উহাদের অধীন বস্তু বা বস্তু-সমবায়ের **অবস্থান** বা **স্বরূপের** উপরেই মাত্র নির্ভর করে, যাহাদের কার্য তাহাদের অধীন বস্তু বা বস্তু-সমবায়ের বেগ বা গতিমুখের উপরে মোটেই নির্ভর করে না, তাহাদিগকেই **সংরক্ষণশীল শ্রেণীর বল** বলা হয়।

স্পষ্টতই অভিকর্ষজ বল এই শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত। তেমনি দম-দেওয়া স্প্রিং-এর বলও সংরক্ষণশীল। দম দিলে স্প্রিং-এর সংকোচন ঘটে অর্থাৎ উহার অংশগুলির আপেক্ষিক সংস্থানের পরিবর্তন হয়—এককথায় উহার স্বরূপের (Configuration) পরিবর্তন ঘটে। ইহার ফলেই স্প্রিং একপ্রকার বল প্রয়োগ করিতে

পারে। সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে স্প্রিং-এর বল সংরক্ষণশীল। বৈদ্যুতিক, চৌম্বক প্রভৃতি বলও সংরক্ষণশীল শ্রেণীর অন্তর্গত।

কিন্তু ঘর্ষণের বল, বায়ুর বল প্রভৃতি এই শ্রেণীতে পড়ে না। কারণ কর্কশ তলের উপর গতিশীল বস্তুর গতিমুখ বদলাইবামাত্র ঘর্ষণ-বলেরও অভিমুখ বদলাইয়া যায়। তেমনি বায়ব বল গতিশীল বস্তুর বেগের উপর নির্ভর করে বলিয়া সংরক্ষণশীল নয়। চলন্ত একটি গাড়ীর বেগ যত বাড়ে বায়ব বলের বাধা ততই বৃদ্ধি পায়। কাজেই উহা সংরক্ষণশীল শ্রেণীতে পড়ে না। ইহাদের বেলায় স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি কমে বা বাড়ে। পরে তাহার কারণ আলোচনা করিব।

১১৪'১। শক্তি-সংরক্ষণতত্ত্ব (The principle of Conservation of Energy) ঃ

মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর মতো **সংরক্ষণশীল বলের অধীন চলমান বস্তু বা বস্তু-সমবায়ের ক্ষেত্রেও স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব থাকে।** এই তত্ত্বই শক্তির সংরক্ষণতত্ত্ব নামে অভিহিত হয়।

ইহার সারকথা হইল এই যে শক্তি অক্ষয়। বলবিদ্যায় যান্ত্রিক শক্তিই মাত্র আমাদের আলোচনার বিষয়। সেইজন্য শক্তি-সংরক্ষণ সূত্রের প্রয়োগ এখানে সীমাবদ্ধ। কেবল সংরক্ষণশীল শ্রেণীর বলের ক্ষেত্রেই যান্ত্রিক শক্তি অর্থাৎ স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি যে সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে তাহাই এখানে বিশেষভাবে বিজ্ঞাপিত। কিন্তু অন্যপ্রকারের বলের বেলাতেও যে শক্তির সংরক্ষণসূত্র প্রযোজ্য তাহা এখানে সবিস্তারে আলোচিত হয় না। কারণ সেরূপ আলোচনায় সকলপ্রকার শক্তিরই স্বরূপ-বিশ্লেষণ প্রয়োজন। কেবল যান্ত্রিক শক্তিকে ভিত্তি করিয়া শক্তির ব্যাপকতম সংরক্ষণসূত্রের ব্যাখ্যা চলে না। আমরা জানি স্থিতি ও গতি এই দুইটি যান্ত্রিক শক্তি ছাড়া তাপ, আলোক প্রভৃতি আরও নানাপ্রকার শক্তি রহিয়াছে। যদি সেইসব শক্তির কথা ধরা যায় তবে দেখা যাইবে বলের প্রকার যাহাই হউক না তাহাদের ক্রিয়াকালে মোট শক্তির পরিমাণ বাড়েও না কমেও না, কেবল রূপান্তর বা চতুর্দিকে বিলয় হয়। উদাহরণস্বরূপ, ঘর্ষণ-বলের বেলায় কিছুটা শব্দ ও তাপ-শক্তি উৎপন্ন হয়। একটি কর্কশ নততলের

শীর্ষবিন্দুতে স্থাপিত একটি বস্তুর যে পরিমাণ স্থিতি-শক্তি ও গতি-শক্তির সমষ্টি থাকে, নিচে গড়াইয়া পড়ার পর ঐ সমষ্টির একটু হ্রাস হয়। কারণ বস্তুটির স্থিতি-শক্তি গড়াইয়া পড়ার সময় যেমন গতি-শক্তিতে তেমনি খানিকটা শব্দ ও তাপ-শক্তিতেও রূপান্তরিত হয়। আর সেই তাপ-শক্তির অনেকটা চারিদিকে উবিয়া যায়। এই কারণে এক্ষেত্রে শেষপর্যন্ত স্থিতি ও গতি-শক্তির সমষ্টি একটু কমিয়া যায়।

এইরূপ বহুতর উদাহরণদ্বারা দেখানো যায় যে, শক্তির বিনাশ নাই। ইহা কেহ সৃষ্টিও করিতে পারে না, নাশও করিতে পারে না। বিশ্বের সমগ্র শক্তি-ভাণ্ডার অক্ষয় অব্যয়। এই শক্তির কেবল রূপ হইতে রূপান্তরে পরিবর্তন সম্ভব। এইভাবে শক্তি, স্থিতি হইতে গতি-শক্তিতে, গতি হইতে স্থিতি-শক্তিতে নিরবচ্ছিন্ন রূপান্তরিত হইতেছে। কখনও আবার স্থিতি-শক্তি, গতি-শক্তি, তাপ শব্দ প্রভৃতিতেও পরিবর্তিত হয়। কখনও রাসায়নিক শক্তি রূপান্তরিত হয় যান্ত্রিক শক্তিতে, যান্ত্রিক শক্তি রূপান্তরিত হয় অন্যতর শক্তিতে। এইভাবে রূপান্তরণ-লীলায় কখনও বা শক্তি বিশেষ বস্তু বা বস্তু-সমবায় ছাড়িয়া চারিপাশে উবিয়া যায়, কিন্তু তাহা বিনষ্ট হয় না। ঐ বস্তু বা বস্তুবিশেষের পক্ষে এইরূপ ভ্রষ্টশক্তি অপচিত বটে, কিন্তু সমগ্র জগতের দৃষ্টিকোণ হইতে দেখিলে ঐ শক্তি স্থানান্তরে সঞ্চিত হয় মাত্র। সুতরাং শক্তির বিশ্বব্যাপক সূত্রে বলে—

শক্তির সৃজন বা বিনাশ নাই, আছে কেবল প্রকার হইতে প্রকারান্তরে পরিবর্তন। কাজেই জগতের মোট শক্তির পরিমাণ ধ্রুব।

১১৪'২। শক্তির রূপান্তর ও অপচয় (Transformation and Dissipation of Energy) :

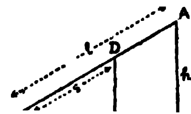
শক্তি-সংরক্ষণতত্ত্বের আলোচনায় শক্তির অহর্নিশ ও অগণ্য রূপান্তর-লীলার ও অপচয়ের কথা বলা হইয়াছে। বলবিদ্যায় যান্ত্রিক শক্তি অর্থাৎ গতি-শক্তি ও স্থিতি-শক্তিই মাত্র বিচার করিতে হয়। আমরা দেখিয়াছি এই দুই শক্তির মধ্যেও স্থিতি হইতে গতি এবং গতি হইতে স্থিতি-শক্তিতে রূপান্তরিত হইয়া

থাকে। সংরক্ষণশীল শ্রেণীর বলের বেলায় ইহাদের সমষ্টির কখনও হেরফের হয় না, কিন্তু অন্যত্র এই শক্তি কিছুটা অপচিত হইয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ, h ফুট উচ্চতা-বিশিষ্ট একটি কর্কশ নততলের উপর শীর্ষ-স্থলে যখন m পাউণ্ড ভরখানি থাকে তখন তাহার স্থিতি-শক্তি mgh গতীয় একক। তল বরাবর উহা যখন নিচে নামিতে থাকে, তখন এই স্থিতি-শক্তির বেশীর ভাগ গতি-শক্তিতে রূপান্তরিত হইতে থাকে, সঙ্গে সঙ্গে উহার খানিকটা আবার ঘর্ষণের বিরুদ্ধে কাজ করিবার সময় অপচিত হইয়া যায়। কাজেই আলোচ্য উদাহরণে l ফুট যদি নততলটির দৈর্ঘ্য হয়, F পাউণ্ড্যাল যদি ঘর্ষণের মোট বাধা হয় এবং নততলটির নিম্নপ্রান্তে m ভরটি যদি v বেগ লাভ করে, তবে

স্থিতি-শক্তি = গতি-শক্তি + বাধার বিরুদ্ধে কাজ

অথবা, $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + Fl.$

আবার ভরটিকে যদি u-বেগে তল বরাবর উপরদিকে চালিত করা যায় তবে উহাতে প্রথমে $\frac{1}{2}mu^2$ পরিমাণ গতি-শক্তি সঞ্চারিত হইবে। উপরে উঠিবার সময় এই গতি-শক্তির রূপান্তর হইতে থাকিবে। উহার খানিকটা পরিণত হইবে স্থিতি-শক্তিতে আর খানিকটা ঘর্ষণের বিরুদ্ধে কাজ করার সময় অপচিত হইয়া যাইবে। ধর, ভরটি তল বরাবর S দূরত্ব পর্যন্ত উঠিতে পারে। স্পষ্টতই, মাটি হইতে উল্লম্বদিকে উহা $S \times \frac{h}{l} \left(\because \frac{DE}{S} = \frac{h}{l} \right)$ উচ্চে উঠে। তাহা হইলে ভরটির স্থিতি-শক্তি তখন, $mg \times \frac{hS}{l}$। গতি-শক্তির আর খানিকটা F ঘর্ষণ-জনিত বাধার বিরুদ্ধে S দূরত্ব যাইতে FS পরিমাণ কার্য সাধন করিবে এবং তাহাতেই অপচিত হইয়া যাইবে।



১২২নং চিত্র

অতএব এখানে, গতি-শক্তি = স্থিতি-শক্তি + বাধার বিরুদ্ধে কার্য

$$\text{অর্থাৎ } \frac{1}{2}mu^2 = mgs\frac{h}{l} + FS।$$

এইভাবে বাতাস ও ঘর্ষণে সমতলে ধাবমান বস্তুরও গতি-শক্তির কিছুটা অপচয় হয়।

এই প্রসঙ্গে অবশ্য একথাও উল্লেখযোগ্য যে, কার্যসাধন শক্তির তথাকথিত অপচয় ঠিক অপচয়ও নহে। প্রকৃতপক্ষে ঐ ধরনের কার্যে শক্তি, তাপ প্রভৃতি সূক্ষ্মতর শক্তিতে রূপান্তরিত মাত্র হয় এবং সেই সূক্ষ্মতর শক্তিরূপে বিলীন হইয়া যায়।

শক্তি-তত্ত্বের বিচিত্র প্রয়োগ

(ক) কার্য ও গতি শক্তিঃ ১১০ অনুচ্ছেদ হইতে আমরা জানি u বেগে চলমান m ভর যদি P বলের প্রয়োগে S সরণের পর থামিয়া যায়, তবে

$$PS = \tfrac{1}{2}mu^2$$

অর্থাৎ বস্তুটির গতি-শক্তি $\tfrac{1}{2}mu^2$ এবং এই গতি-শক্তি দ্বারা সাধিত কার্যের পরিমাণ PS। PS ও $\tfrac{1}{2}mu^2$ উভয়েরই মান গতীয়।

উদাহরণ (১) A mass of 2 lbs. moving with a velocity of 100 ft. per sec. meets with an obstacle. If the obstacle yields 1 inch, what is the average force of the blow?

[C. U. I.Sc. 1912]

এখানে আঘাত ও প্রত্যাঘাত সমান। ইহার মান P হইলে, এই P পরিমাণ প্রত্যাঘাতের বিরুদ্ধে 2 পা. ভরটি লক্ষ্যবস্তুর ভিতর 1 ইঞ্চি বা $\tfrac{1}{12}$ ফুট ডাবিয়া গিয়াছে।

অতএব, কৃত কার্য $= P \times \tfrac{1}{12}$

এবং গতি-শক্তি $= \tfrac{1}{2} \times 2 \times 100^2$;

$$\therefore \quad \frac{P}{12} = \frac{1}{\not{2}} \times \not{2} \times 100^2$$

$$\therefore \quad P = 12 \times 100 \times 100 \text{ পাউণ্ড্যাল}$$

$$= 3750 \text{ পাউণ্ড-ভার।}$$

উদাহরণ (২) A mass projected vertically upwards rises to a height of 25 ft. Find its initial velocity.

বস্তুটির ভর ও বেগ যথাক্রমে m পাউণ্ড u ফু. / সে.।

এখানে, গতি-শক্তি = অভিকর্ষজ বলের বিরুদ্ধে কৃত কার্য

অর্থাৎ $\tfrac{1}{2}mu^2 = m \times 32 \times 25$;

$\therefore \quad u^2 = 64 \times 25$, অর্থাৎ $u = 40$ ফু./সে.।

উদাহরণ (৩) A train is moving on a horizontal railway at the rate of 30 m.p.h. ; if the steam be suddenly turned off, how far will it go before it stops, the resistance being taken as equal to 5 lbs.-wt. per ton ? [C. U. I.Sc. 1956]

গাড়ীখানির ভর m টন এবং নির্ণেয় দূরত্ব s ফুট ধরিলে, বাধার মোট বল $5m$ পাউণ্ড-ভার বা $5 \times 32m$ পাউণ্ড্যাল।

$$30 \text{ m.p.h.} = 44 \text{ ফু./সে.}$$

গতি-শক্তি = বাধার বিরুদ্ধে কৃত কার্য ;

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2} \times 2240m \times 44^2 = 5 \times 32m \times s$$

$$s = \frac{1120 \times 44 \times 44m}{5 \times 32m} \text{ বা } 7 \times 44 \times 44$$

বা 13552 ফুট।

গতি-শক্তির পরিবর্তন ও কার্য : ১১১ অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে আমরা জানি, P বলের অধীন m ভরের প্রারম্ভিক বেগ u এবং S সরণের মাথায় প্রান্তিক বেগ v হইলে, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = PS$ অর্থাৎ বস্তুর গতি-শক্তির পরিবর্তন উহার উপর প্রযুক্ত বলের দ্বারা সাধিত কার্যের সমান। এখানেও গতি-শক্তি এবং কার্যের মান গতীয় এককে প্রকাশিত বলিয়া ধরিতে হয়। পূর্বের উদাহরণগুলি আসলে এই তত্ত্বেরই অন্তর্গত। একটা বেগে চলিতে চলিতে থামিয়া যাওয়ার অর্থ বেগটির শূন্যে পরিণতি। কাজেই সেখানে গতি-শক্তির পরিবর্তন $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}m.0^2 = \frac{1}{2}mu^2$। $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = PS$ সমীকরণে m, u, v, P ও S এর যে-কোন চারিটি জানিলে পঞ্চমটি সহজেই বাহির করা যায়। এই গ্রন্থের দ্বিতীয় খণ্ডের নবম পরিচ্ছেদে ভরবেগ সংরক্ষণতত্ত্ব প্রয়োগে যে সকল অঙ্ক কষা হইয়াছে, তাহাদের অনেকগুলি এখন শক্তি ও কার্য তত্ত্বের প্রয়োগে অনেক সহজে কষা যায়।

উদাহরণ (৪) A shot of mass 100 lbs. moving at 1600 ft. per sec. strikes a fixed target. How far will the shot penetrate the target assuming that it offers an average resistance of the weight of 12000 tons ? [C. U. I.Sc. 1933]

গোলাটি যেন লক্ষ্যবস্তুর ভিতর s ফুট ঢুকিয়া যায় এবং তখন তাহার বেগ শূন্যে পরিণত হয়।

গতি-শক্তির পরিবর্তন = সাধিত কার্য

$$\tfrac{1}{2} \times 100 \times 1600^2 - \tfrac{1}{2} \times 100 \times 0^2 = 12000 \times 2240 \times 32 \times s,$$

অথবা, $12000 \times 2240 \times 32s = 50 \times 1600 \times 1600.$

$$\therefore \quad s = \frac{50 \times 1600 \times 1600}{12000 \times 2240 \times 32} \text{ ফুট} = \frac{25 \times 12}{12 \times 14} \text{ ইঞ্চি}$$

$$= 1\tfrac{11}{14} \text{ ইঞ্চি।}$$

উদাহরণ (৫) A bullet of mass $\frac{1}{2}$ oz. has its velocity reduced from 1,300 ft./sec. to 1,100 ft./sec. in passing through a metal sheet of thickness $\frac{1}{8}$ in. Find the average resistance in pound-weight of the metal.

Find what fraction of its kinetic energy the bullet loses in penetrating the sheet. [Oxford & Cambridge Jt. Board]

$$\text{গতি-শক্তির পরিবর্তন} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \times 16}(1300^2 - 1100^2) \text{ বা } \frac{2400 \times 200}{64}$$

বা 7500 পাউণ্ড্যাল। ... ... (1)

$$\text{সাধিত কার্য} = R \times \frac{1}{8 \times 12} \text{ ফুট-পাউণ্ড্যাল।}$$

$$\therefore \quad \frac{R}{96} = 7500 \text{ অর্থাৎ } R = 7500 \times 96 \text{ পাউণ্ড্যাল}$$

$$= \frac{7500 \times 96}{32} \text{ পাউণ্ড বা } 22{,}500 \text{ পাউণ্ড।}$$

প্রাথমিক গতি-শক্তি $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{32} \times 1300 \times 1300$ ফুট-পাউণ্ড্যাল।

(1) হইতে গতি-শক্তির হ্রাস = 7500 ফুট পাউণ্ড্যাল।

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় ভগ্নাংশ} = \frac{7500 \times 64}{1300 \times 1300} = \frac{48}{169}.$$

(খ) শক্তির রূপান্তর-তত্ত্বের প্রয়োগ : ১১৪·২ অনুচ্ছেদের আলোচনায় আমরা দেখিয়াছি যে, কখনও কখনও (i) স্থিতি-শক্তি পুরাপুরি গতি-শক্তিতে

অথবা গতি-শক্তি পুরাপুরি স্থিতি-শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কখনও (ii) স্থিতি-শক্তির খানিক গতি-শক্তিতে রূপান্তরিত এবং খানিকটা বাধার বিরুদ্ধে কার্যসাধনে অপচিত হয়। অনুরূপে কখনও আবার (iii) গতি-শক্তিও খানিক স্থিতি-শক্তিতে রূপান্তরিত এবং বাকী খানিকটা বাধার বিরুদ্ধে কার্যসাধনে অপচিত হইয়া যায়। স্থিতি-শক্তি P.E. (Potential Energy) এবং গতি-শক্তি K.E. (Kinetic Energy) হইলে—

(i) প্রথম ক্ষেত্রে, P.E. = K.E.

(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, P.E. = K.E. + বাধার বিরুদ্ধে কার্য

এবং (iii) তৃতীয় ক্ষেত্রে K.E. = P.E. + বাধার বিরুদ্ধে কার্য।

উদাহরণের সাহায্যে ইহাদের প্রয়োগ দেখাইতেছি।

উদাহরণ (৬) A smooth metal ball of 100 lbs. rolls down a smooth incline through a vertical distance of 100 ft. What speed does it acquire then ?

ধাতুর বলটি প্রথমে 100 ফুট উপরে ছিল। তখন তাহার স্থিতি-শক্তি ছিল $mgh = 100 \times 32 \times 100$ ফুট-পাউণ্ড্যাল। এখানে কোন বাধা নাই বলিয়া সমগ্র স্থিতি-শক্তি শেষপর্যন্ত গতি-শক্তিতে রূপান্তরিত হইয়াছে। এক্ষেত্রে শেষ সীমার বেগ যদি u হয় তবে গতি-শক্তি $= \frac{1}{2} \times 100u^2$.

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2} \times 100u^2 = 100 \times 32 \times 100$$

বা, $u^2 = 6400$;

$\therefore \quad u = 80$ ফু./সে.।

উদাহরণ (৭) A string has masses of 3 and 5 lb. respectively attached one to each end. The string is hung over a horizontal bar and released from rest. When the 5 lb. mass has fallen through 4 ft. its velocity is 6 ft./sec. Find the loss of energy in foot-pound-weight due to friction between the string and the bar. [Oxford & Cambridge Jt. Board]

দড়ির দুই মাথায় বাঁধা ভর দুইটির সমবেত গতি-শক্তি

$$\tfrac{1}{2}.5.6^2 + \tfrac{1}{2}.3.(-6)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}.5.6^2 + \tfrac{1}{2}.3.6^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(5+3)\,6^2,$$

বা 4×36 ফুট-পাউণ্ড্যাল।

4 ফুট নিচে নামার পর 5 পাউণ্ড ভরটির $5g \times 4$ বা $20g$ ফুট-পাউণ্ড্যাল স্থিতি-শক্তি হ্রাস হয় এবং 3 পাউণ্ড-ভরটি 4 ফুট উপরে উঠায় উহার $3g \times 4$ বা $12g$ ফুট-পাউণ্ড্যাল স্থিতি-শক্তি বৃদ্ধি পায। কাজেই মোটমাট $(20g - 12g)$ বা $8g$ ফুট-পাউণ্ড্যাল স্থিতি-শক্তি হ্রাস পায়। স্পষ্টতই এই স্থিতি-শক্তির খানিকটা 4×36 ফুট-পাউণ্ড্যাল পরিমাণ গতি-শক্তিতে রূপান্তরিত হইয়াছে। বাকীটা ঘর্ষণের বাধা অতিক্রমণে অপচিত হইয়াছে।

$\therefore$ $8g$ বা $8 \times 32 = 4 \times 36 +$ অপচিত স্থিতি-শক্তি ;

$\therefore$ অপচিত স্থিতি-শক্তি $= 8 \times 32 - 4 \times 36$

বা, 112 ফুট-পাউণ্ড্যাল $= \frac{112}{32}$ বা 3·5 ফুট-পাউণ্ড-ভার।

উদাহরণ (৮) A mass of 5 lbs. projected up a rough incline of 1 in 3 with a velocity of 16 ft./sec. moves up to 9 ft. and then stops to descend. What is the resistance ?

এখানে, প্রাথমিক গতি-শক্তি $= \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \times 5 \times \overset{8}{\cancel{16}} \times 16$

বা 640 ফুট-পাউণ্ড্যাল।

তল বরাবর 9 ফুট উপরিস্থিত বিন্দুর উল্লম্ব-উচ্চতা $= \frac{1}{3} \times 9$ বা 3 ফুট।

ঐ বিন্দুতে ভরটির অর্জিত স্থিতি-শক্তি $= mgh$ বা $5 \times 32 \times 3$

বা 480 ফুট-পাউণ্ড্যাল।

এখন বাধা-জনিত বল যদি R পাউণ্ড্যাল হয, তবে তল ববাবব বাধার বিরুদ্ধে কৃত কার্য $= 9R$.

গতি-শক্তি $=$ স্থিতি-শক্তি $+$ বাধার বিরুদ্ধে কৃত কার্য,

$\therefore$ $640 = 480 + 9R$,

অথবা, $9R = 640 - 480 = 160$ অর্থাৎ $R = \frac{160}{9}$ পাউণ্ড্যাল।

$\therefore$ বাধা $= \frac{\overset{5}{\cancel{160}}}{9 \times \cancel{32}}$ বা $\frac{5}{9}$ পাউণ্ড-ভার।

(গ) শক্তি ও ক্ষমতা : (i) নিউটনের সূত্র হইতে আমরা জানি যে, অমসৃণ তলে যদি কোন বস্তু বা যন্ত্রযান সমবেগে চলমান হয় তবে বুঝিতে হইবে যে, প্রযুক্ত বল ও বাধা সমান হইয়াছে। সমান না হইলে বলের ক্রিয়ায়

অবশ্যই ত্বরণ উৎপন্ন হইবে। মনে রাখা প্রয়োজন যন্ত্রযানের চরম অশ্ব-ক্ষমতা সবসময় প্রযুক্ত হয় না, প্রয়োজনমতো যথা-পরিমাণ উহার ব্যবহার করা চলে।

(ii) দ্বিতীয়ত, সমতল-পথে একমাত্র যন্ত্রাদি হইতেই বল প্রযুক্ত হয়। অতএব যন্ত্রপ্রযুক্ত বল P এবং বাধা R হইলে সমবেগের ক্ষেত্রে $P = R$. নততল-পথে কিন্তু যন্ত্রাদি সঞ্চারিত বলের সহিত অভিকর্ষজ বলও সক্রিয় হয়। বলা বাহুল্য নিচে নামিবার সময় এই অভিকর্ষজ বল যন্ত্রের বলের সহিত যুক্ত হয় আর উপরে উঠিবার সময় উহা (অভিকর্ষজ বল) যন্ত্রবল হইতে বিযুক্ত হয়। উদাহরণস্বরূপ, n-এ m নতি-সম্পন্ন একটি অমসৃণ তলে যদি W গতীয় এককভার P গতীয় একক বলে নিচদিকে সমবেগে চালিত হয় এবং পথের বাধা যদি R গতীয় একক হয়, তবে গতি-সঞ্চারে P বল ও W ভারের $\frac{n}{m}$ অংশ অর্থাৎ $\frac{Wn}{m}$ অংশ এককভার—এই দুইয়ে মিলিয়া R বাধার সমান হইবে। সুতরাং এই ক্ষেত্রে

$$P + \frac{W.n}{m} = R.$$

আবার গতি যদি উপরদিকে হয়, তবে স্পষ্টতই,

$$P - W.\frac{n}{m} = R.$$

(iii) পাম্প-জাতীয় স্থির যন্ত্রের কার্যকালে দুইপ্রকার গতি-শক্তিই উৎপন্ন হইতে পারে। ধর, পাম্পের সাহায্যে মাটি হইতে খানিক উচ্চে তুলিয়া একটা বেগে জল ছাড়িয়া দেওয়া হইতেছে। তাহা হইলে জলকে উঁচুতে তুলিয়া স্থিতি-শক্তি আর বেগ দিয়া গতি-শক্তি দেওয়া হইল।

এইরূপ ক্ষেত্রে যন্ত্রবিশেষের অশ্ব-ক্ষমতা যদি x হয়, তবে

$550gx$ = প্রতি সেকেণ্ডে অর্জিত (স্থিতি-শক্তি + গতি-শক্তি)

অর্থাৎ $x = \frac{(P.E. + K.E.) \text{ per sec}}{550g}$.

আবার কার্যের বিচারে, $x = \frac{\text{প্রতি সেকেণ্ডে মোট কৃত কার্য (গতীয় একক)}}{550g}$।

নিচে উদাহরণের দ্বারা উপরের সূত্রগুলির প্রয়োগ দেখাইতেছি।

উদাহরণ (৯) A car weighing 30 cwt. is travelling at a uniform speed of 30 m.p.h. and the combined road and air resistance is 60 lb.-wt., calculate the rate in horse-power at which the engine is working.

The combined resistance suddenly increases by 25 per cent. and the pull of the engine remains the same ; find the subsequent retardation. [Oxford & Cambridge Jt. Board]

(i) 30 m.p.h. = 44 ফু./সে. ।

গাড়ীটি সমবেগে চলিতেছে বলিয়া ইঞ্জিন-প্রযুক্ত বল আর বাতাস ও পথের সমবেত বাধা সমান ; অর্থাৎ প্রযুক্ত বল (P) = 60 পাউণ্ড ।

∴ প্রতি সেকেণ্ড কৃত কার্য (= PS) = 60 × 44 ফুট-পাউণ্ড

$$= \frac{60 \times 44}{550} \text{ বা } \frac{24}{5} \text{ বা } 4\frac{4}{5} \text{ অশ্ব-ক্ষমতা।}$$

(ii) বাধার 25% = $\overset{15}{\cancel{60}} \times \frac{\cancel{25}}{\underset{4}{\cancel{100}}}$ পাউণ্ড = 15 পাউণ্ড । কাজেই 25% বৃদ্ধি হওয়ায় বাধার পরিমাণ দাঁড়াইল (60 + 15) বা 75 পাউণ্ড । কিন্তু প্রশ্নানুসারে ইঞ্জিনের টান বা বল সেই 60 পাউণ্ডই রহিল ।

∴ (75 − 60) বা 15 পাউণ্ড বাধা গাড়ীটির মন্দন উৎপন্ন করিবে । এই মন্দন যদি f হয়, তবে

$$15 \times 32 = 30 \times 112 \times f, \text{ অথবা, } f = \frac{\cancel{15} \times \overset{2}{\cancel{32}}}{\cancel{30} \times \underset{7}{\cancel{112}}} \text{ বা } \frac{1}{7} \text{ ফু/সে}^2.\text{।}$$

উদাহরণ (১০) A wagon weighing 336 lb. is drawn from rest along a horizontal track for a distance of 1 mile and then has a velocity of 7·5 m.p.h. Find the total work done in moving the wagon if there is a steady force of 60 lb. resisting its motion. [London University]

প্রশ্নানুসারে গাড়ীর কামরাটি ত্বরণের ফলে এক মাইলের মাথায় ঘণ্টায় 7·5 মাইল বেগ লাভ করিয়াছে । সুতরাং কামরাটির উপর টান বা প্রযুক্ত বল P পা. নিশ্চয় বাধা 60 পা. অপেক্ষা বড় । উৎপন্ন ত্বরণ যেন f.

$$7{\cdot}5 \text{ m.p.h.} = \frac{75 \times 176 \times 3}{3600} \text{ বা } 11 \text{ ফু / সে ।}$$

আবার, $v^2 = 2fs$ সূত্রানুসারে $f = \frac{v^2}{2s} = \frac{\cancel{11} \times 11}{2 \times \underset{160}{\cancel{1760}} \times 3}$ বা $\frac{11}{960}$ ফু/সে^{2} ।

$P = mf$ সূত্রানুসারে—

$$(P - 60) \times 32 = \overset{7}{\cancel{336}} \times \frac{11}{\underset{20}{\cancel{960}}} \text{ বা } \frac{77}{20},$$

$$\text{বা,}\quad P - 60 = \frac{77}{20 \times 32};$$

$$\therefore\quad P = \left(\frac{77}{20 \times 32} + 60\right) = \frac{38477}{640} \text{ পাউণ্ড;}$$

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় কার্য} = \frac{38477}{640} \times \overset{11}{\cancel{1760}} \times 3, \text{ বা } \frac{1269741}{4}$$

বা, 317,435¼ ফুট-পাউণ্ড।

উদাহরণ (১১) A car, mass 30 cwt. moves at a steady speed of 25 m.p.h. up a gradient of 1 in 14. Find the horse-power utilised in giving the car potential energy. If the resistance to the motion of the car is 20 lb.-wt. per ton, what is the total horse-power ? [London University]

$$25 \text{ m.p h.} = \frac{25 \times 1760 \times 3}{3600} \text{ বা } \frac{110}{3} \text{ ft/sec.}$$

∴ গাড়ীখানি প্রতি সেকেণ্ডে নততল বরাবর $\frac{110}{3}$ ft. উঠে। কাজেই ভূমি হইতে উল্লম্বদিকে উহা প্রতি সেকেণ্ডে $\frac{110}{3} \times \frac{1}{14}$ বা $\frac{55}{21}$ ft. উচ্চে উঠে।

∴ প্রতি সেকেণ্ডে উহা $\frac{30 \times 112 \times 55}{21}$ ফুট-পাউণ্ড স্থিতি-শক্তি লাভ করে।

স্পষ্টতই, এই পরিমাণ স্থিতি-শক্তি দিবার জন্য $\frac{30 \times 112 \times 55}{21 \times 550}$ বা 16 অশ্ব-ক্ষমতা লাগে।

∴ স্থিতি-শক্তিদানের জন্য **16 অশ্ব-ক্ষমতা** প্রযুক্ত হয়।

আবার, টন প্রতি 20 পাউণ্ড হিসাবে 30 cwt. বা $\frac{3}{2}$ টনের মোট বাধা $=\frac{3}{2}\times 30$ বা 30 পাউণ্ড নততল বরাবর প্রযুক্ত বল যেন P পাউণ্ড এবং ঐ তল বরাবর গাড়ীর ভার $30\times 112\times \frac{1}{14}$ বা 240 পাউণ্ড।

$$\therefore\quad P-240=30,\quad \text{অথবা,}\quad P=270 \text{ পাউণ্ড।}$$

∴ প্রতি সেকেণ্ডে প্রযুক্ত বলের কৃত কার্য $=\overset{90}{\cancel{270}}\times\frac{110}{\cancel{3}}$ বা 9900 ফুট-পা.।

∴ এই পরিমাণ কার্যসাধনে প্রয়োজন $\frac{90\times 110}{550}$ বা 18 অশ্ব-ক্ষমতা।

এইভাবে, নির্ণেয় মোট ক্ষমতা = **18 অশ্ব-ক্ষমতা।**

উদাহরণ (১২) A fire-engine raises 1200 gallons of water per minute through a height of 6 ft. and discharges with a velocity of 32 ft. per second. Find the horse-power of the engine, given that one gallon of water weighs 10 lbs.

[U. P. B. 1940]

মিনিটে 1200 গ্যালন = সেকেণ্ডে $\frac{1200}{60}$ বা 20 গ্যালন বা 200 পাউণ্ড।

∴ ইঞ্জিনটি প্রতি সেকেণ্ডে অভিকর্ষজ বলের বিরুদ্ধে 200×6 বা 1200 ফুট-পাউণ্ড কার্য করে। অর্থাৎ 1200 ফুট-পাউণ্ড স্থিতি-শক্তি দেয়।

আবার উহা 200 পাউণ্ড জলকে প্রতি সেকেণ্ডে $\frac{1}{2}\times 200\times 32\times 32$ ফুট-পাউণ্ড্যাল বা 3200 ফুট-পাউণ্ড গতি-শক্তি দেয়।

∴ প্রতি সেকেণ্ডে উহা $(1200+3200)$ বা 4400 ফুট-পাউণ্ড শক্তি উৎপন্ন করে।

∴ উহার ক্ষমতা $=\frac{\overset{8}{\cancel{4400}}}{\cancel{550}}$ বা **8 অশ্ব-ক্ষমতা।**

উদাহরণ (১৩) (i) A locomotive working at 600 h. p. draws a train of mass 400 ton along a level track at a constant speed of 45 m. p. h. Calculate the force in pound-weight per ton, resisting the motion. (ii) Assuming the resistance and the horse-power of the engine to be unaltered, find the speed at which the train travels up a gradient of 1 in 448.

[London University]

(i) প্রতি সেকেণ্ডে ইঞ্জিনখানি 600×550 ফুট-পাউণ্ড কার্য করে।

$$45 \text{ m. p. h.} = \frac{45 \times 1760 \times 6}{3600} \text{ বা } 66 \text{ ft./sec.}$$

নির্ণেয় বাধা যদি R পাউণ্ড হয়, তবে প্রতি সেকেণ্ডে বাধার বিরুদ্ধে কৃত কার্য

$= R \times 66$ ফুট-পাউণ্ড।

∴ ইঞ্জিনের প্রতি সেকেণ্ডে কার্য = বাধার বিরুদ্ধে কৃত কার্য

$600 \times 550 = R \times 66$

100 50

$$R = \frac{600 \times 550}{66} \text{ বা } 5000 \text{ পাউণ্ড।}$$

6

400 টনে মোট বাধা 5000 পাউণ্ড।

∴ টন প্রতি বাধা $= \frac{5000}{400}$ বা $12\frac{1}{2}$ পাউণ্ড।

(ii) গাড়ীখানি যেন P পাউণ্ড্যাল বলে v ft./sec. বেগে উপরে উঠিতে থাকে। 5000 পাউণ্ড বা 5000×32 পাউণ্ড্যাল বাধার বিরুদ্ধে উপরদিকে এই P বল ও নিচদিকে গাড়ীর ওজন 400×2240 এর $\frac{1}{448}$ পাউণ্ড অর্থাৎ $\frac{400 \times 2240 \times 32}{448}$ পাউণ্ড্যাল সক্রিয় রহিয়াছে।

10 16

$$\text{অতএব, } P - \frac{400 \times 2240 \times 32}{448} = 5000 \times 32,$$

বা, $P = 160{,}000 + 64000$ পাউণ্ড্যাল

$= 224000$ পাউণ্ড্যাল।

∴ এই P বল সেকেণ্ডে $224000v$ ফুট-পাউণ্ড্যাল কার্য করে। কিন্তু ইঞ্জিনখানি প্রতি সেকেণ্ডে করে $600 \times 550 \times 32$ ফুট-পাউণ্ড্যাল কার্য।

$\therefore \quad 224000v = 600 \times 550 \times 32,$

বা, $v = \frac{6\cancel{00} \times 55\cancel{0} \times \cancel{32}}{\cancel{224000}_{7}}$ ফু./সে

$= \frac{6 \times 55 \times 3600}{7 \times 3 \times 1760}$ মাইল/ঘণ্টা

$= 32\frac{1}{7}$ মাইল/ঘণ্টা।

উদাহরণ (১৪) A pump working at $6\frac{29}{36}$ h. p. forces water through a pipe 2 inches in diameter. With what velocity does the water escape ? [1 cu. ft. of water = 62·5 lbs.]

জলেব বেগ যদি v ফুট / সে. হয়, তবে প্রতি সেকেণ্ডে পাইপখানির v ফুট দৈর্ঘ্যেব মধ্যে যতটা জল ধরে ততটা জল নিষ্কাশিত হয়।

এই v ফুট পাইপেব ভিতবকাব আযতন $(= \pi r^2 h)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{1}{144} \times v$ ঘনফুট [$\because$ $r = 1$ ইঞ্চি $= \frac{1}{12}$ ফুট]

এই আয়তনের জলেব ভর

$= \frac{2\cancel{2}^{11} v}{7 \times 144} \times \frac{125}{\cancel{2}}$ [$\because$ 1 ঘনফুট জল $= 62\ 5$ পা]

$\therefore$ প্রতি সেকেণ্ডে কৃত কার্য = প্রতি সেকেণ্ডে গতি-শক্তিব পবিবর্তন

$= \frac{1}{2} \times$ ভব $\times v^2$

$\frac{1}{2} \times \frac{11 \times 125}{7 \times 114} v^3$

কিন্তু পাম্পখানি $6\frac{29}{36}$ অশ্ব-ক্ষমতায় অর্থাৎ সেকেণ্ডে $\frac{245 \times 550}{36}$ ফুট-পাউণ্ড

বা $\frac{550 \times 245 \times 32}{36}$ ফুট-পাউণ্ড্যাল কার্য করে।

$\therefore \quad \frac{11 \times 125}{2 \times 7 \times 144} v^3 = \frac{245 \times 550 \times 32}{36}$

$v^3 = \frac{\cancel{245}^{49} \times \cancel{550}^{\cancel{22}^{2}} \times 32 \times 2 \times 7 \times \cancel{144}^{\cancel{16}^{4}}}{\cancel{36} \times \cancel{11} \times \cancel{125}_{\cancel{25}_{5}}}$

$= 49 \times 7 \times 32 \times 16 = 7^3 \times 8^3$

$v = 7 \times 8$ বা 56 ফু./সে.।

অনুশীলনী ২০

1. A $\frac{1}{2}$ oz. bullet moving at 1600 ft. per second strikes the trunk of a tree and penetrates 6 inches into it. What is the average resistance ?

2. A person is cycling along a level road at a constant speed of 10 m. p. h., calculate the kinetic energy in foot-pound-weight of cyclist and cycle, assuming the combined mass to be 144 lb If steady application of the brakes bring the cyclist, now free wheeling, to rest in a distance of 20 yd., calculate the value of the average resisting force in pound-weight. [London University]

3. A particle projected up a perfectly smooth incline of 1 in 4 rises up to 16 ft. along the plane. Find the velocity of projection.

4. A mass of 40 lbs is projected along a rough horizontal plane with a velocity of 12 ft per second. If the resistance due to friction is 10 lbs., how far will it move ?

5. A particle projected with a velocity of 65·4 cm./sec. along a rough horizontal plane moves through a distance of 1 09 m. before coming to rest. If the resistance to the motion is 10 gram-wt , what is the mass of the particle ?

6. A loaded boat of mass $1\frac{4}{5}$ ton is pulled straight along still water through a distance of $25\frac{2}{3}$ yds. when it acquires a speed of 5 m. p. h. Find the measure of the pull in pound-weight

7. Show that the change of kinetic energy of a particle per unit of space described is equal to the force acting on it.

A mass of 10 lbs. falls through 100 ft. and is then brought to rest by penetrating one foot into sand. Find the average pressure on the sand. [H. S. B. S. E. 1963]

8. Find the work done by gravity on a stone having a mass of $\frac{1}{2}$ lb. during the tenth second of its fall. [U. P. B. 1943]

9. A bullet weighing half an ounce leaves the muzzle of a rifle barrel, 2 ft. long, with a velocity of 2000 ft. per second. Find the force acting on the bullet in the barrel, assuming it to be uniform, and also the time taken by the bullet to traverse the barrel. [C. U. I.Sc. 1931]

10. At what height would the kinetic energy of a particle falling from a height of h ft. be equal to half its potential energy ?

11. A train of mass 75 tons when moving with a velocity of 30 m. p. h. has the steam shut off. The resistance brings it to rest in 440 yds. on the level. Find the whole force of resistance. [U. P. B. 1939]

12. A body of mass 2 oz. moving with a velocity of 1280 ft./sec. faces a resistance of 1600 lbs.-wt. Through what distance and for what time will the body move before coming to rest ? [H. S. B. S. E. 1962]

13. A bullet of mass $\frac{1}{2}$ oz, moves with a velocity of 1500 ft. per second and loses 8750 ft.-poundals of its kinetic energy in passing through a metal sheet. If the sheet offers a resistance of $5\frac{55}{64}$ ton-wt., find, (i) with what velocity the bullet emerges out of the sheet and also (ii) the thickness of the metal sheet.

14. A 15 lbs. projectile travelling at the rate of 1500 ft./sec. penetrates one inch into a fixed plate 6 in. thick. Find the velocity with which it would emerge from a plate 4 in. thick of the same material, the resistance being uniform in each case.

15. How many foot-pounds of kinetic energy are acquired by a mass of 6 lbs. in falling freely through a height of 10 ft. ? How much additional kinetic energy is acquired in falling freely through the next 20 ft. ?

[Oxford & Cambridge Jt. Board]

16. A mass of body rolls down 100 yds. along an incline of 1 in 6. The frictional resistance is 0·1 of the weight of the mass. The mass rolls on a level with the same frictional resistance after reaching the bottom of the incline. How far does it go ?

[সংকেত : নততলটির শীর্ষে স্থিতি-শক্তি $= mg \times \frac{1}{6} \times 100 \times 3$ বা $50mg$; নততলটির নিম্নসীমায় বেগ v হইলে, ঘর্ষণ-বল $= \frac{mg}{10}$ বলিয়া $50mg = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mg}{10} \times 300$ অথবা $v^2 = 40g$; আবার ঘর্ষণ-বল যদি f মন্দন উৎপন্ন করে, তবে $\frac{mg}{10} = mf$ অথবা $f = \frac{g}{10}$; আবার এখানে, $0 = v^2 - 2fs$,

বা, $s=\frac{v^2}{2f}=\frac{40g}{2\times\frac{g}{10}}=\frac{40\times \overset{5}{10}}{2}$ বা 200 ft.]

17. A body, mass 500 lb., slides down from rest down an inclined plane 200 ft. long, the top of the plane being 100 ft. higher than the bottom. If the body has a velocity of 30 ft./sec. when it arrives at the bottom of the plane, find the average force opposing its motion. [London University]

18. A mass of 6 lbs. is driven up a rough incline of 1 in 6 with a velocity of 16 ft. per sec. If it travels up to 12 ft. along the inclined plane, what is the frictional resistance ?

19. A ball of 3 lb. mass projected up a rough incline of 1 in 8 travels 21 ft. before coming to rest. If the frictional resistance is $1\frac{3}{8}$ lbs., what must be its initial velocity ?

20. A mass of 4 lb is thrown up along a rough inclined plane with a velocity of 24 ft./sec. If it moves up to a distance of 24 ft., the frictional resistance being $\frac{1}{8}$ of the weight of the mass, find the inclination of the plane.

21. Two masses of 4 lbs. and 2 lbs. are connected by a string which hangs over a perfectly smooth horizontal bar. What velocity will the system acquire after falling through 3 ft. from rest ? (Assume the resistance to be nil.)

22. When a train is travelling along a level track with a uniform velocity of 60 m. p. h. the engine exerts a pull of 1 ton-wt. continuously. What is the horse-power developed by the engine ?

If the mass of the train is 200 ton, find the distance in miles it will travel when steam is shut off, assuming the retarding force unaltered. [London University]

23. A car of mass 2400 lbs. acquires a velocity of 30 m. p. h. in 4 seconds and moves on with the same velocity. If the road resistance is 75 lb.-wt., what is the horse-power of the engine of the car at the end of the 4th second ?

24. A train of weight 300 ton is being drawn by an engine up an incline of 1 in 80 at a steady speed of 20 m. p. h. The frictional forces are equivalent to a resistance to motion of 21 lb.-wt. per ton of the train. Calculate the tension in the

engine-coupling and the horse-power transmuted to the train by the engine. [Oxford & Cambridge Jt. Board]

25. A train of total weight 300 ton moves at constant speed of 40 m. p. h. on the level, the resistance encountered at this speed being 10 lb.-wt. per ton. Find the horse-power of the engine. What increase in horse-power is required to maintain the same speed up an incline of 1 in 500 ?
[London University]

26. A car weighing 1000 lb. is travelling at 40 m. p. h. on a level road. What additional horse-power will be needed to continue at this speed up an incline of 1 in 30 ? Assume the resistance to be unaltered. [Oxford & Cambridge Jt. Board]

27. A motor-car of mass 2000 lb. is found to run at a uniform speed of 15 m. p. h. along a road with a downward gradient of 1 in 20, with engine shut off. Find (a) the resistance in pound-weight, to motion at this speed, (b) the horse-power required to drive it at the same speed up the gradient, the resistance being unaltered. [London University]

28. A man is cycling at the rate of 10 miles an hour up a hill whose slope is 1 in 30 ; if the weight of the man and machine be 200 lbs., find the rate at which he is working, neglecting frictional and air resistance. [U. P. B. 1953]

29. A train of 200 tons is ascending an incline of 1 in 50 at a steady speed of 30 miles per hour. If the friction and wind resistance are equivalent to a force of 11·2 lbs. per ton, find the horse-power exerted by the engine.

If the pull and the resistance remain the same when the track becomes level, prove that the acceleration is then 0·64 ft. per second per second. [U. P. B. 1951]

30. Find the horse-power of an engine which can project 10000 lbs. of water per minute with a velocity of 80 ft. per second. [C. U. 1944]

31. Find the horse-power of an engine which can project 13200 lbs. of water per minute with a velocity of 48 ft. per second. [C. U. 1951]

32. Find the horse-power of an engine which forces water through a pipe $3\frac{1}{2}$ inches in diameter at 64 ft. per sec.
[1 cu. ft. water = 62·5 lbs.]

33. Water originally at rest in a tank, is being pumped out with a speed of 96 feet per second through a pipe of diameter $3\frac{1}{2}$ inches. Neglecting any work done in changing the level, calculate the horse-power of the engine, if the efficiency of the pumping machinery be 75%. [One cu. ft. of water weighs 62·5 lbs.] [U. P. B. 1941]

[সংকেত : ইঞ্জিনখানির h. p. যদি x হয়, তবে x এর 75% বা $\frac{3}{4}x$ অশ্ব-ক্ষমতা এখানে কার্যকর।]

34. A shot of mass m is fired from a gun of mass M with a velocity u relative to the gun. Find the actual velocities of the shot and the gun and show that their kinetic energies are inversely proportional to their masses. [C. U. I. Sc. 1953]

35. A mass of 3 lbs. is shot vertically upwards so as to reach a height of 25 ft. Find the original kinetic energy in foot-poundals. [H. S. B. S. E. 1961]

ষোড়শ পরিচ্ছেদ

সরল যন্ত্র (Simple machines)

১১৫। **যন্ত্র** : যে বস্তু বা বস্তুবিন্যাসের কৌশলে একটি বিন্দুতে সুবিধা-মতো বল প্রয়োগ করিয়া অন্যতর বিন্দুতে সক্রিয় কোন একটা বাধা বা ভার অপসারণ বা ধারণ করা যায়, বলবিদ্যায় তাহাই যন্ত্র নামে অভিহিত হয়।

বল বা চেষ্টা (Effort or power) : বাধাকে অতিক্রম করিবার জন্য যন্ত্রে প্রযুক্ত বলকে শুধু বল বা চেষ্টা বলে। সাধারণতঃ P অক্ষরটি দ্বারা এই বল বা চেষ্টা সূচিত হয়।

বাধা বা ভার (Resistance or weight) : যন্ত্রের সাহায্যে যে বল বা ভার অতিক্রম করা হয় তাহাকে বাধা বা ভার বলা হয় এবং উহা W বা R অক্ষর দ্বারা সূচিত হইয়া থাকে।

কাঁচি দিয়া কাপড় কাটিবার সময় দুই আঙুলে আমরা হাতলে চাপ দিই। তাহাতে কাঁচির ফলা দুইটির মাঝে কাপড় কাটিতে থাকে। এক্ষেত্রে হাতলের উপর চাপ হইল বল বা চেষ্টা, আর কাপড়খানা কাটার বিরুদ্ধে যে বল প্রয়োগ করে তাহাই বাধা। কপিকলের উপর দড়ি গলাইয়া এক মাথায় টানিলে অপর মাথায় যুক্ত একটা বস্তু উপরে উঠিতে থাকে। এক্ষেত্রে নিচদিকে টান হইল বল বা চেষ্টা আর বস্তুটির ভার হইল বাধা। বলবিদ্যার বিচারে নততলও একটি যন্ত্র, কেননা উহার উপরে স্থাপিত একটা ভারী জিনিসকে অপেক্ষাকৃত অল্প আয়াসে উপরে উঠাইতে কায়দা হয়। যন্ত্রের প্রধান গুণ হইল এই কায়দাটাই। অনেকসময় তাহাতে বাধার চাইতে বেশীই বল প্রয়োগ করিতে হয়। তবু সেইটাই কায়দামতো প্রয়োগ করা যায় বলিয়া যন্ত্রের ব্যবহার হয়। উদাহরণস্বরূপ আগুন হইতে চিমটা দিয়াই আমরা একটা জিনিস তুলি। ইহাতে বাধার চাইতে জোর বেশীই লাগে। তবু তাহাতে তাপ এড়াইয়া জিনিসটা তুলিয়া লইতে কায়দা পাওয়া যায়। কাজের সুবিধার জন্যই যন্ত্র আর যন্ত্রমাত্রই কিছু কার্য (work) সাধন করে। অতএব কার্যের তত্ত্ব (Principle of work) প্রয়োগ করিয়া যন্ত্রের বিচার সুবিধাজনক হয়।

১১৬। সরল যন্ত্র ও কার্যতত্ত্ব (Simple machine and the Principle of work) : আমরা দেখিলাম যে, যন্ত্রের কাজ সুবিধামতো বল-প্রয়োগে বাধা অতিক্রম করা যায়। কিন্তু এই বাধা দুইরকমের হইতে পারে। যে বাধা বা ভার অপসারণ, ধারণ বা অতিক্রম করাই যন্ত্রের মূল কাজ—সেই গেল একরকমের বাধা। আর একরকম বাধাও আছে যন্ত্রেরই অন্তর্নিহিত। যন্ত্রের ভার, ঘর্ষণ ইত্যাদি এই শ্রেণীর অন্তর্গত। যন্ত্রমাত্রেরই এই ধরনের বাধা কিছু-না-কিছু আছেই। আর যন্ত্র যখন কাজ করে তখন দ্বিতীয়প্রকারের বাধা অতিক্রম না করিলে উহা চালুই হইতে পারে না, যদিও প্রথমপ্রকার বাধা অতিক্রম করাই তাহার মূল উদ্দেশ্য। যন্ত্র তাহা হইলে দুইপ্রকারের কাজ করে। যে কাজ আসল কাজ অর্থাৎ মূল বাধা অতিক্রমকালে উহা যে কার্য সাধন করে, তাহাকে **সার্থক কার্য** (useful work) আর যন্ত্রের অন্তর্নিহিত বাধা অতিক্রমকালে তাহাকে যেটুকু কাজ ঠেকিয়া করিতে হয়, তাহাকে বলে **অপচয়মূলক** বা **নষ্ট কার্য** (wasteful or lost work)।

এখন, **সরল যন্ত্র বলিতে** আমরা এমন যন্ত্র বুঝি **যাহার ক্রিয়াকালে অপচয়মূলক কার্য ধর্তব্যের মধ্যেই আসে না।** যদিও এমনতর যন্ত্র অনেকটা কাল্পনিক তথাপি ইহাই যন্ত্রের আদর্শ। **সরল যন্ত্রের বিচারে তাই আমরা উহার অংশপাতির ভার ও ঘর্ষণাদি উপেক্ষা করি এবং উহার দ্বারা সাধিত কার্য ও উহার মূল বাধা দ্বারা সাধিত কার্যের পরিমাণ সমান বলিয়াই গণ্য করি।** সরল যন্ত্রের বেলায় কার্যতত্ত্বের ইহাই মূল কথা।

১১৭। যান্ত্রিক সুবিধা, বেগ-অনুপাত ও দক্ষতা (Mechanical advantage, Velocity ratio and Efficiency) :

(i) যান্ত্রিক সুবিধা (Mechanical Advantage) : যন্ত্রবিশেষের উপর সক্রিয় ও সাম্যাবস্থাপন্ন বাধা (বা ভার) এবং বলের (বা চেষ্টার) অনুপাতকে ঐ যন্ত্রের যান্ত্রিক সুবিধা বলা হয়। ইংরাজীতে ইহাকে Mechanical Advantage বা সংক্ষেপে M. A. বলিয়া লেখা হয়। যান্ত্রিক সুবিধা কখনও কখনও বলানুপাত (Force-ratio) নামেও অভিহিত হয়।

$$\text{M A.} = \frac{\text{বাধা}}{\text{চেষ্টা}} = \frac{R}{P} \text{ বা } \frac{W}{P}.$$

(ii) বেগ-অনুপাত (Velocity ratio): যন্ত্রের সচল অবস্থায় উহাতে সক্রিয় বল ও বাধার প্রয়োগ-বিন্দুদ্বয় যে বেগ লাভ করে তাহাদের অনুপাতকে বেগ-অনুপাত বলে। সুতরাং বলের প্রয়োগ-বিন্দু u বেগে এবং বাধার প্রয়োগ-বিন্দু v বেগে যদি t সময় পর যথাক্রমে x ও y দূরত্বে অপসারিত হয়, তবে স্পষ্টতই,

$$\text{বেগ-অনুপাত (V.R.)} = \frac{u}{v} = \frac{ut}{vt} = \frac{x}{y}$$

$$\text{অর্থাৎ V.R.} = \frac{\text{P-র সরণ}}{\text{W-র সরণ}}।$$

১১৬ অনুচ্ছেদে বর্ণিত সরল যন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য কার্যতত্ত্ব অনুসারে,

চেষ্টার কার্য = বাধার কার্য

অর্থাৎ $Px = Wy.$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{x}{y} = \frac{u}{v}.$$

অতএব ঘর্ষণ ও ভারহীন আদর্শ সরল যন্ত্রে,

যান্ত্রিক সুবিধা = বেগ-অনুপাত।

(iii) দক্ষতা (Efficiency): আগেই বলা হইয়াছে যে, বাস্তব ক্ষেত্রে প্রত্যেক যন্ত্রকেই অল্পবেশী কিছু-না-কিছু অপচয়মূলক কার্য করিতে হয়। কাজেই যন্ত্রে প্রযুক্ত বলের মোট কার্য-পরিমাণ নিছক বাধার বিরুদ্ধে যন্ত্র-কৃত কার্যের পরিমাণ অপেক্ষা একটু বেশী হয়। অর্থাৎ বলের মোট কার্য-পবিমাণ, যন্ত্রের সার্থক কার্য-পরিমাণ (useful work) অপেক্ষা বেশী হয়। যন্ত্রের দক্ষতা বলিতে এই বলের মোট কার্য-পরিমাণ ও যন্ত্রের সার্থক কার্যের অনুপাত বুঝায়।

$$\text{সুতরাং, দক্ষতা} = \frac{\text{যন্ত্রকৃত সার্থক কার্য}}{\text{চেষ্টাকৃত মোট কার্য}}$$

স্পষ্টতই সার্থক কার্য প্রায় সর্বদা মোট কার্য অপেক্ষা কম বলিয়া দক্ষতা প্রায়ই একের কম, কাজে কাজেই একটি ভগ্নাংশ। কিন্তু সচরাচর শতকরা হিসাবেই দক্ষতার পরিমাপ হইয়া থাকে। কোন যন্ত্রের দক্ষতা যদি $\frac{4}{5}$ হয়, তবে তাহাকে শতকরা হিসাবে $\frac{4}{5} \times 100$ বা 80% বলিযা প্রকাশ করা হয়।

একমাত্র আদর্শ যন্ত্রেরই দক্ষতা 100%. বলা বাহুল্য, এইরূপ যন্ত্রের ভার বা ঘর্ষণাদিব বিরুদ্ধে কিছুমাত্র কার্য হয় না বলিয়া ধবা হয়। অতএব সংজ্ঞা অনুসারে বলা যায় যে, সবল যন্ত্রের দক্ষতা 100%. সেই ক্ষেত্রে P চেষ্টা ও W বাধাব প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ যথাক্রমে যদি x ও y হয, তবে

$$\text{দক্ষতা} = \frac{\text{যন্ত্রকৃত সার্থক কার্য}}{\text{চেষ্টাকৃত মোট কার্য}} = \frac{Wy}{Px}$$

$$= \frac{W}{P} \div \frac{x}{y}$$

$$= M A. \div V.R.$$

$$= \frac{\text{যান্ত্রিক সুবিধা}}{\text{বেগ-অনুপাত}} \text{।}$$

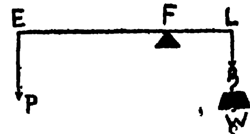
সংক্ষেপে, $E = \frac{M.A.}{V.R.}$ ।

(ক) লিভার প্রভৃতি যন্ত্র

১১৮। (i) **লিভার (Lever)ঃ** সরল বা বক্র যে কঠিন ও অনমনীয় দণ্ড উহাব কোন স্থির-বিন্দুব চারিদিকে একই সমতলে ঘুবিতে পারে তাহাকে **লিভার** যন্ত্র বলে। লিভার যন্ত্র উহাব যে বিন্দুর চারিদিকে ঘুরে তাহাকে বলে **আলম্ব** (Fulcrum)। এই আলম্ব-বিন্দু হইতে লিভাবেব উপর প্রযুক্ত চেষ্টা বা বলের প্রয়োগ-বিন্দু পযন্ত এবং আলম্ব হইতে বাধার প্রয়োগ-বিন্দু পর্যন্ত—এই দুইটি অংশকে লিভারেব বাহু (arm) বলা হয়। লিভারের নিজস্ব ওজন অবশ্যই আছে। কিন্তু উল্লেখ না থাকিলে আমরা সেই ওজন গ্রাহ্য করিব না।

চেষ্টা ও বাধার প্রযোগ-বিন্দুদ্বয় ও আলম্বের অবস্থানভেদে লিভার তিন শ্রেণীভুক্ত।

প্রথমশ্রেণীর লিভারঃ এই শ্রেণীর লিভারে আলম্ব-বিন্দুটি চেষ্টা ও বাধার মধ্যবর্তী। উদাহরণস্বরূপ ১২২(ক) নং চিত্রে EL একটি প্রথমশ্রেণীব লিভাব। উহার আলম্ব F বিন্দু, চেষ্টা P বলের প্রয়োগ-বিন্দু E এবং বাধা



১২২(ক) নং চিত্র

W ভারের প্রয়োগ-বিন্দু L এর মধ্যে অবস্থিত। নির্ভার প্রথমশ্রেণীর লিভারে চেষ্টা, বাধা ও আলম্ব-বিন্দুর প্রতিক্রিয়া—এই তিনটি বল সক্রিয়। ভ্রামক বা সদৃশ সমান্তরাল বলের নিয়মে স্পষ্টতই,

$$P.EF = W.FL.$$

$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{EF}{FL} = \text{যান্ত্রিক সুবিধা।}$$

এখানে EF বাহুকে যথাসম্ভব বাড়াইয়া এবং FL বাহুকে যথাসম্ভব কমাইলে যান্ত্রিক সুবিধা ইচ্ছামতে' বাড়ানো যায়। এইশ্রেণীর লিভারে প্রযুক্ত বল (বা চেষ্টা) ও বাধা একই মুখে সক্রিয় হয়।

উদাহরণ ঃ দাঁড়িপাল্লা, ঢেঁকি, জলসেচনের ডোঙা প্রভৃতি প্রথমশ্রেণীর লিভার। কাঁচি এইশ্রেণীর দ্বৈত বা জোড় লিভার। কাঁচির যে দুইটি অংশ মধ্যখানে আঁটা তাহাদের প্রত্যেকটি এক-একটি প্রথমশ্রেণীর লিভার। ইহার সামনের দিকে ফলার উপর বাধা এবং পিছনদিকে হাতলের উপর চেষ্টা বা বল প্রযুক্ত। মধ্যখানে কজার বিন্দুটি উহার আলম্ব।

দ্বিতীয়শ্রেণীর লিভার ঃ এইশ্রেণীর লিভারে বাধার প্রয়োগ-বিন্দুটি বল ও আলম্বের মধ্যবর্তী। উদাহরণস্বরূপ, ১২৩নং চিত্রে EF লিভারটির E বিন্দুতে চেষ্টা বল P, F বিন্দু আলম্ব এবং L বিন্দুতে বাধা বা ভার সক্রিয়। বাধা এখানে বল ও আলম্বের মধ্যবর্তী। কাজেই লিভারটি দ্বিতীয়শ্রেণীর।

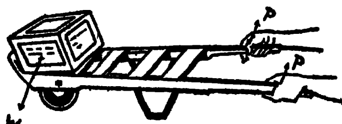


১২৩নং চিত্র

C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে, এখানেও

$$P.EF = W.FL$$

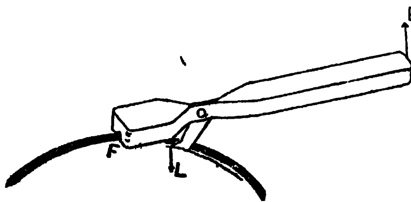
$$\text{অথবা} \quad \frac{W}{P} = \frac{EF}{FL} = \text{যান্ত্রিক সুবিধা}$$



১২৪নং চিত্র

কিন্তু কল্পনানুসারে FL সর্বদা EF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। কাজেই দ্বিতীয়শ্রেণীর লিভারে যান্ত্রিক সুবিধা একের চাইতে বেশী অর্থাৎ এখানে সর্বদাই বাধা বা ভারের চাইতে কম-পরিমাণ বল প্রযোগ করিতে হয়। দ্বিতীয়শ্রেণীর লিভারে বল ও ভার ভিন্নমুখী।

উদাহরণঃ হুইল ব্যাবো (Wheel barrow)-নামক এক-চাকার গাড়ী (১২৪নং চিত্র) ; টিন-কাটা যন্ত্র (১২৫নং চিত্র) ; জাঁতি (১২৬নং চিত্র) দ্বিতীয়-শ্রেণীব দ্বৈত লিভার।



১২৫নং চিত্র



১২৬নং চিত্র

তৃতীয়শ্রেণীর লিভারঃ এইশ্রেণীব লিভারেব চেষ্টা ও বলের প্রয়োগ-বিন্দুটি আলম্ব ও বাধাব মধ্যবর্তী। ১২৭নং চিত্রে FL লিভাবটিতে L প্রান্তে ভাব W, F প্রান্তে আলম্ব এবং মধ্যে E বিন্দু-তে বল P সক্রিয। সুতরাং, ইহা তৃতীয়শ্রেণীর লিভার।

P
F
W

১২৭নং চিত্র

স্পষ্টতই F এর চাবিদিকে ভ্রামক লইলে,

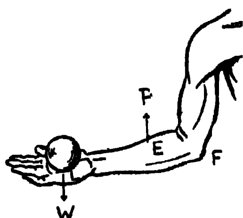
$$P.EF = W.FL.$$

$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{EF}{FL} = \text{যান্ত্রিক সুবিধা।}$$

কল্পনা অনুসারে EF সর্বদা FL অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলিয়া $\frac{EF}{FL} < 1$; কাজেই যান্ত্রিক সুবিধার চাইতে বরং অসুবিধাই হয় এইরূপ লিভারে। অর্থাৎ বাধার

চাইতে এখানে বল লাগে বেশী। তবু বিশেষ ক্ষেত্রে বাধার বিরুদ্ধে বল-প্রয়োগকালে ইহার উপযোগিতা আছে। এইশ্রেণীর লিভারেও বল ও বাধা বিপরীতমুখী।

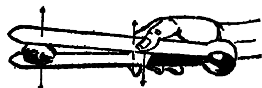
উদাহরণঃ মানুষের হাত (১২৮নং চিত্র); বৈঠা (১২৯নং চিত্র); চিম্‌টা (১৩০নং চিত্র) এইশ্রেণীব দ্বৈত লিভার।



১২৮নং চিত্র



১২৯নং চিত্র



১৩০নং চিত্র

১১৯। (ii) দাঁড়িপাল্লা (Common balance): পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, যন্ত্র হিসাবে দাঁড়িপাল্লা প্রথমশ্রেণীর লিভাব। এই গ্রন্থের দ্বিতীয় সোপানে, ৪০·১ অনুচ্ছেদে ইহার একটি মোটামুটি বর্ণনাও দেওবা হইযাছে।

সাধারণ দাঁড়িপাল্লা মূলত একটি সরল দণ্ড, দণ্ডের দুই-মাথায় দুইটি সমান ওজনে পাল্লাযুক্ত। এই দণ্ডের ঠিক মধ্যবিন্দুর একটু উপরে একটি বিন্দুর চারিদিকে দণ্ডটি একই সমতলে উঠানামা করিতে পাবে। ইহাই আলম্ব-বিন্দু। এইরূপ নিখুঁত একটি দাঁড়িপাল্লার আলম্ব-বিন্দু, দণ্ডটির মধ্যবিন্দু ও ভারকেন্দ্র একই উল্লম্বরেখায় থাকে এবং পাল্লা দুইটিতে ভার না চাপাইলে দণ্ডটি অনুভূমিক রেখায় স্থির থাকে। কোন জিনিস ওজন কবিতে হইলে একটি পাল্লায় উহাকে রাখিয়া অপর পাল্লায় জানা ওজনের এমন কয়েকটি বাটখারা চাপাইতে হয় যে, অনুভূমিক রেখায় স্থির হয়। বাটখারাগুলির সমবেত ওজন তখন জিনিসটির ওজন সূচিত করে।

সূক্ষ্মতর দাঁড়িপাল্লায় আলম্ব-বিন্দুটি ও দুইপ্রান্তস্থিত পাল্লা ঝুলাইবার বিন্দু দুইটিকে গোঁজের মতো আকৃতিবিশিষ্ট মসৃণ ইস্পাতের ফলকের উপর স্থাপন করা হয়। এই ইস্পাতের ফলকগুলিকে knife blades বলে।

১২০। আদর্শ দাঁড়িপাল্লায় আবশ্যক গুণাবলী (Requisites of a good balance) ঃ একটি সত্যিকারের ভালো দাঁড়িপাল্লার চারিটি গুণ থাকা একান্ত প্রয়োজন, যথা ঃ (১) যথার্থতা, (২) সুস্থিতি, (৩) সুবেদিতা ও (৪) অনমনীয়তা।

(a) যথার্থতা (Truth) ঃ পাল্লা দুইটি ভারশূন্য থাকিলে অথবা উভয় পাল্লায় সমান সমান ওজন থাকিলে, যে দাঁড়িপাল্লার দণ্ডটি অনুভূমিক রেখায় সুস্থিত হয়, তাহাকে **যথার্থ** (true) দাঁড়িপাল্লা বলা হয়।

(b) সুস্থিতি (Stability) ঃ পাল্লা দুইটি শূন্য থাকাকালে নাড়িয়া দেওয়া মাত্র যে দাঁড়িপাল্লার দণ্ডটি দ্রুতবেগে উহার অনুভূমিক অবস্থানে ফিরিয়া আসে, তাহা **সুস্থিত** (stable) দাঁড়িপাল্লা।

(c) সুবেদিতা (Sensitiveness) ঃ যে দাঁড়িপাল্লার পাল্লা দুইটির উপর স্থাপিত বস্তুর ওজনে অতি সামান্য তারতম্য হইবামাত্র দণ্ডটি অনুভূমিক রেখা হইতে বেশ একটু হেলিয়া পড়ে, তাহাকে **সুবেদী** (sensitive) বলে।

(d) অনমনীয়তা (Rigidity) ঃ যে দাঁড়িপাল্লার বাহু দুইটি অর্থাৎ সমগ্র দণ্ডটি, গুরুভারেও নত হয় না, তাহাকে **অনমনীয়** (rigid) বলে।

১২১। আদর্শ দাঁড়িপাল্লার আবশ্যক গুণাবলী থাকার শর্ত (Conditions for having the requisites of a good balance) ঃ

(a) **যথার্থতার** জন্য দাঁড়িপাল্লার (i) বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যে সমতা, (ii) পাল্লা দুইটির ওজনে সমতা এবং (iii) উহার আলম্ব-বিন্দুর তলায় একই উল্লম্বরেখায় ভারকেন্দ্রটির অবস্থান প্রয়োজন।

(b) **সুস্থিতির** জন্য দাঁড়িপাল্লাটির আলম্ব-বিন্দুকে একই উল্লম্বরেখায় ভার-কেন্দ্রের একটু উপরে স্থাপিত করিতে হয়।

আমরা জানি সমগ্র দাঁড়িপাল্লার ওজন উহার ভারকেন্দ্র দিয়া উল্লম্বরেখায় সক্রিয় হইবে। আলম্ব-বিন্দু ভারকেন্দ্রের উপরে একই উল্লম্বরেখায় অবস্থিত হইলে স্বভাবতই উহা সুস্থিত হইবে।

(c) **সুবেদিতার** জন্য দাঁড়িপাল্লার ভারকেন্দ্র হইতে আলম্ব-বিন্দুর উচ্চতা কমানো এবং বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য বাড়ানো প্রয়োজন। কিন্তু ইহাতে সুস্থিতি ক্ষুণ্ণ হয়। সেইজন্য দাঁড়িপাল্লার দণ্ডটির সহিত লম্বভাবে একটি কাঁটা বা জিভ্ যুক্ত থাকে। পাল্লাটি এদিক্-ওদিক্ হেলিবামাত্র এই কাঁটাখানি একটি কোণ-সূচক পাতের উপর মোটামুটি কোণে হেলিয়া যায়। ইহা দ্বারা পাল্লা দুইটির উপর স্থাপিত বস্তুর ভারে সামান্য তারতম্যটুকু পর্যন্ত ধরা পড়ে।

(d) **অনমনীয়তার** জন্য দাঁড়িপাল্লার দণ্ড শক্ত ধাতুতে অথবা বিশেষ ধরনের কাঠামোর আকারে গঠন করিতে হয়।

১২২। নির্ভুল ওজন নির্ণয়ঃ দাঁড়িপাল্লার দোষে অনেকসময় জিনিসের প্রকৃত ওজন ধরা পড়ে না। মোটামুটিভাবে এই দোষগুলি তিন রকম—(ক) দাঁড়িপাল্লার বাহুগুলি অসমান, বা, (খ) পাল্লা দুইটির ওজন অসমান, অথবা, (গ) দাঁড়িপাল্লার ভারকেন্দ্র ও আলম্ব-বিন্দু একই উল্লম্বরেখায় অবস্থিত না হইলে ওজনে হেরফের হইবেই। কখনও কখনও আবার এই তিনরকম দোষই একসঙ্গে বর্তমান থাকিতে পারে এবং তাহাতে ওজনে গোলমাল হইতে পারে।

কিন্তু এরকম যে-কোন একটা বা সবকয়টা ত্রুটি থাকিলেও ত্রুটিপূর্ণ দাঁড়িপাল্লা দ্বারাও নির্ভুল ওজন নির্ণয় করা যায়। নিচে আমরা তাহার উপায়গুলি বর্ণনা করিতেছি।

১২২·১। (ক) অসমান-বাহু তুলায় নির্ভুল ওজন নির্ণয়ঃ ধর, তুলার বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য a ও b একক এবং প্রকৃত ওজন W একক। এখন, একটা জিনিসকে এক পাল্লায় রাখিয়া ওজন করিলে W_1 একক এবং অপর পাল্লায় রাখিয়া ওজন করিলে যদি W_2 একক ওজন হয়, তবে

$$W_1 a = Wb$$

এবং $$W_2 b = Wa.$$

$\therefore$ $W_1 W_2 ab = W^2 ab$, অথবা, $W^2 = W_1 W_2$

অর্থাৎ $W = \sqrt{W_1 W_2}$

অর্থাৎ **প্রকৃত ওজন ভুল ওজন দুইটির গুণোত্তর-মধ্যক।**

(খ) সমান-বাহু তুলার ভারকেন্দ্র ও আলম্ব-বিন্দু একই উল্লম্ব-রেখায় না থাকিলেও উহার দ্বারা নির্ভুল ওজন নির্ণয়ঃ তুলায় ওজন w, বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য a একক এবং একটা বস্তুর প্রকৃত ওজন যেন W একক। বস্তুটিকে এক পাল্লায় রাখিয়া ওজন করিলে W_1 একক এবং অপর পাল্লায় রাখিয়া ওজন করিলে যেন W_2 একক ওজন মনে হয়। এখন আলম্ব-বিন্দু হইতে তুলার ভারকেন্দ্রের অনুভূমিক দূরত্ব x একক ধরিয়া আলম্ব-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$W_1a+wx=Wa \quad \cdots \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

এবং $$Wa+wx=W_2a. \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad (2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে,

$$(W_1-W)a=(W-W_2)a,$$

অথবা, $2W=W_1+W_2$ অর্থাৎ $W=\dfrac{W_1+W_2}{2}$

অর্থাৎ, **প্রকৃত ওজন ভুল ওজন দুইটির সমান্তর-মধ্যক।**

স্পষ্টতই (ক) ও (খ) অনুচ্ছেদে বর্ণিত উপায়ে আমরা অঙ্ক কষিয়া নির্ভুল ওজন নির্ণয় করিতে পারি।

১২২·২। দুইবার ওজনের পদ্ধতি (Method of Double Weighing)ঃ

(ক) বোর্দা'র পদ্ধতি (Borda's method)ঃ এই পদ্ধতিতে যে বস্তুর ওজন নির্ণয় করিতে হইবে তাহাকে প্রথমে একটি পাল্লায় রাখিয়া অপর পাল্লায় বালি, কাঁকর বা পাথরকুচি চাপাইয়া ভারসাম্য আনিতে হয়। তাহার পর বস্তুটিকে সরাইয়া তাহার জায়গায় জানা ওজনের উপযুক্ত পরিমাণ বাটখারা চাপাইয়া ভারসাম্য স্থাপন করিতে হয়। এই বাটখারাগুলি দ্বারা সূচিত ওজনই বস্তুটির প্রকৃত ওজন সূচিত করে। তুলার যে-কোন দোষ থাকুক না কেন এইভাবে নির্ভুল ওজন পাওয়া যাইবেই। প্রমাণ এই

(i) তুলাটির বাহুদ্বয় অসমান হইলে, উহারা যেন a ও b একক দীর্ঘ।

যে বস্তুর ওজন নির্ণয় করিতে হইবে উহার ওজন W_1, বালির ওজন W_2 এবং বাটখারার ওজন W হইলে,

$$W_1a = W_2b \quad \text{এবং} \quad Wa = W_2b.$$

$$\therefore \quad W_1a = Wa \quad \text{অর্থাৎ} \quad W_1 = W$$

অর্থাৎ বাটখারার ওজন W দ্বারা বস্তুটির প্রকৃত ওজন সূচিত হইবে।

(ii) তুলাটির পাল্লা দুইটির ওজনও যদি অসমান হয়, তবে w_1 ও w_2 যেন তাহাদের ওজন। তাহা হইলে,

$$(W_1 + w_1)a = (W_2 + w_2)b$$

$$\text{এবং} \quad (W + w_1)a = (W_2 + w_2)b.$$

$$\therefore \quad W_1 + w_1 = W + w_1.$$

$$\therefore \quad W_1 = W.$$

∴ বাটখারার ওজনই বস্তুটির প্রকৃত ওজন।

(iii) তুলাটির ভারকেন্দ্র ও আলম্ব-বিন্দু একই উল্লম্বরেখায় না থাকিলে আলম্ব-বিন্দু হইতে ভারকেন্দ্রের অনুভূমিক দূরত্ব যেন x একক এবং তুলাটির ভার যেন W′। তাহা হইলে, আলম্ব-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে

$$W_1a + W'x = W_2b \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$Wa + W'x = W_2b. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

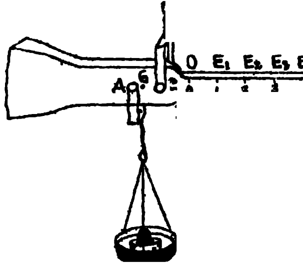
(1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে,

$$(W_1 - W)a = 0 \quad \text{অর্থাৎ} \quad W_1 = W.$$

∴ এক্ষেত্রেও বাটখারার ওজনই বস্তুটির প্রকৃত ওজন।

(খ) দুইবার মাপিবার আর-একটি পদ্ধতি আছে। উহা দ্বারা তুলার বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা যায়। এই পদ্ধতিতে বস্তুটিকে এক পাল্লায় রাখিয়া অপর পাল্লায় এমন ওজনের বাটখারা চাপাইতে হয় যে, ভারসাম্য স্থাপিত হয়। তারপর ঐ বস্তু ও বাটখারাকে পরস্পরের পাল্লা বদলাইয়া আবার মাপিতে হয়। এবারেও যদি ভারসাম্য অক্ষুণ্ণ থাকে, তবে তুলাটি নির্ভুল, নচেৎ উহাতে দোষ রহিয়াছে। এভাবে সহজেই তুলার বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা চলে।

১২৩। (iii) রোমান তুলাযন্ত্র (Roman Steelyard) :



১৩১নং চিত্র

রোমান তুলাযন্ত্র বা স্টীলইয়ার্ড এমন একটি ধাতুদণ্ডে গঠিত, যাহার একটা দিক অপরদিক হইতে অধিকতর পুরু ও মোটা, কাজেই বেশী ভারী। ভারী দিকটার কাছাকাছি একটি আলম্ব-বিন্দুর চারিদিকে একই উল্লম্বতলে দণ্ডখানি উঠানামা করিতে পারে। সরু দিকটা সবল ও সমসত্ত্ব। উহার গায়ে একটি নির্দিষ্ট ভার এপাশ-ওপাশ সরানো যায়। ভারী দিকটার প্রায় প্রান্তে একটি বিন্দু হইতে একটি পাল্লা ঝুলানো থাকে। ওজন করিবার সময় বস্তুবিশেষকে ঐ পাল্লায় রাখিয়া দণ্ডটির গায়ে লাগানো ভারটিকে এদিক-ওদিক এমন অবস্থানে সরানো হয় যে, ঐ দণ্ড অনুভূমিক রেখায় থাকে। সূচক ভারটির এইরূপ অবস্থানে, দণ্ডের গায়ে দাগ দেখিয়া বস্তুটির ওজন জানা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, ১৩১নং চিত্রে AB একটি রোমান তুলাযন্ত্র। উহার বামদিকে AD অংশ ডানদিকের DB অংশ অপেক্ষা অনেক পুরু, চওড়া ও ভারী। AD অংশে C বিন্দু তুলাটির আলম্ব এবং G বিন্দু উহার ভারকেন্দ্র। ডানদিকে P ভারটি দণ্ডের গায়ে ইচ্ছামতো সরানো যায়। DB অংশ সরল ও সমসত্ত্ব। উহারই গায়ের দাগ বিভিন্ন পরিমাণ ওজন সূচিত করে। আলম্ব-বিন্দুর বামে একই রেখায় A বিন্দু হইতে একটি পাল্লা ঝুলানো আছে।

তুলাটির ওজন যেন w। P যখন O বিন্দুতে থাকে তখন যেন তুলাটি অনুভূমিক অবস্থানে থাকে। অতএব, C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$P.OC = w.GC \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এইবার পাল্লাটির উপর W ভার চাপাইয়া P ভারটিকে ডানদিকে E_1 বিন্দুতে সরাইলে যেন তুলাটি অনুভূমিক হয়।

সুতরাং, C বিন্দুর চারিদিকে আবার ভ্রামক লইলে,

$$P.E_1C = W.AC + w.GC \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিলে,

$$P(E_1C - OC) = W.AC,$$

অথবা $P.OE_1 = W.AC.$

$$\therefore \quad OE_1 = \frac{W}{P} \cdot AC.$$

এখন, তুলাদণ্ডটির ডানদিকে AC, 2AC, 3AC,··· প্রভৃতির সমান করিয়া যথাক্রমে OE_1, OE_2, OE_3,··· প্রভৃতি মাপিয়া দাগ দিলে

যখন P ভারটি E_1 বিন্দুতে, তখন

$$OE_1 = \frac{W}{P} \cdot AC = \frac{W}{P} OE_1,$$

অথবা $\frac{W}{P} = 1$, বা, $W = P.$

যখন P ভার E_2 বিন্দুতে, তখন

$$OE_2 = \frac{W}{P} \cdot AC, \quad \text{বা,} \quad 2AC = \frac{W}{P} \cdot AC,$$

$$\text{বা,} \quad 2 = \frac{W}{P}, \quad \text{বা,} \quad W = 2P.$$

যখন P ভার E_3 বিন্দুতে, তখন

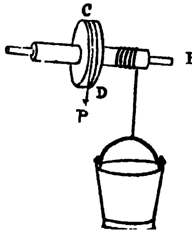
$$OE_3 = \frac{W}{P} \cdot AC, \quad \text{বা,} \quad 3AC = \frac{W}{P} AC,$$

$$\text{বা,} \ 3 = \frac{W}{P}, \ \text{বা,} \ W = 3P.$$

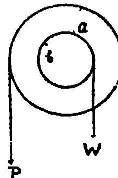
স্পষ্টতই P ভারটিকে যদি 1 একক পরিমাণ লওয়া হয়, তবে E_1, E_2, E_3,··· প্রভৃতি বিন্দুতে P-র অবস্থান যথাক্রমে 1, 2, 3,··· প্রভৃতি একক ওজন সূচিত করিবে। অনুরূপভাবে E_1E_2, E_2E_3 প্রভৃতি দূরত্বকে ক্ষুদ্রতর ভাগে বিভক্ত করিয়া দাগ দিলে আরও বহুতর মাপের সূচী তৈরী করা যায়।

* * রেল-গাডীর স্টেশন ও বিমান-স্টেশনে মাল মাপিবাব জন্য যে যন্ত্র ব্যবহৃত হয় তাহা এই রোমান তুলাযন্ত্রেবই একটু পবিবর্তিত রূপ। উহাকে Weight Bridge বলে।

১২৪। **(iv) চক্র ও অক্ষ (Wheel and axle)**ঃ চক্র ও অক্ষ যন্ত্রটি মূলত ছোটবড দুইটি সিলিণ্ডার দ্বাবা গঠিত। ক্ষুদ্রতর ব্যাসার্ধযুক্ত ছোট সিলিণ্ডাবখানি বা অক্ষ-যন্ত্রটি একটি অনুভূমিক অক্ষরেখাব চারিদিকে অবাধে ঘুবিতে পাবে। ইহা বৃহত্তব ব্যাসার্ধযুক্ত সিলিণ্ডার বা চক্রটিব কেন্দ্রভাগে গলিযা গিয়া দুইপাশে বাহিব হইয়া আছে এবং দুইপ্রান্তে দুইটি ধাবকেব উপর স্থাপিত বহিয়াছে। সিলিণ্ডাব দুইটি পবস্পরেব সহিত গায়ে গাযে শক্তভাবে সাঁটিয়া আছে। চক্রটি অক্ষদণ্ডের সহিত একই অনুভূমিক বেখায় চারিদিকে ঘুবিয়া থাকে। চক্রটিব গায়ে একটি দডির একপ্রান্ত আটকাইয়া কয়েক পাক জডাইযা লওয়া হয় এবং উহার মুক্তপ্রান্তে বল প্রযোগ কবা হয়। অক্ষদণ্ডটিব গায়েও আবেকটি দডিব একপ্রান্ত আটকাইয়া উহাকে উল্টাদিকে কয়েক পাক জডানো হয়। উহাব মুক্তপ্রান্তে ভাব ঝুলানো থাকে। মোটামুটিভাবে এইরূপই চক্র ও অক্ষদণ্ডের গঠন।



১৩২নং চিত্র



১৩৩নং চিত্র

AB অক্ষদণ্ডটিব উপব বলযিত CD চক্র—এই যেন একটি চক্র ও অক্ষযন্ত্র। চক্র ও অক্ষেব ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a ও b একক হইলে, চক্রটি একপাকে $2\pi a$ একক এবং অক্ষটি একপাকে $2\pi b$ একক দূরত্ব ঘুবে। ফলে P বলের টানে চক্রের দড়িটি (কাজেই P বলের প্রযোগ-বিন্দু) নিচদিকে $2\pi a$ একক নামে এবং সেই সময়ে W ভারের বিরুদ্ধে উহার প্রয়োগ-বিন্দুসহ অক্ষের দড়িটি $2\pi b$ একক

উপরে উঠে। এখন ঘর্ষণাদি বল উপেক্ষা করিলে, P বলের কার্য = W ভারের বিরুদ্ধে কার্য।

$$\therefore \quad P \times 2\pi a = W \times 2\pi b,$$

বা, $$Pa = Wb$$

বা, $$\frac{W}{P} = \frac{a}{b} = \text{যান্ত্রিক সুবিধা।}$$

স্পষ্টই 'a' চক্রের ব্যাসার্ধ অক্ষের ব্যাসার্ধ অপেক্ষা যত বেশী বড হয় ততই যান্ত্রিক সুবিধা বাড়িবে।

আবার u বেগে যে সময়ে P বলের প্রযোগ-বিন্দু $2\pi a$ দূরত্ব যায় v বেগে W ভারের প্রযোগ-বিন্দু যেন সেই সময়ে $2\pi b$ দূরত্ব যায়।

$$\therefore \quad \frac{u}{v} = \frac{2\pi a}{2\pi b} = \frac{a}{b} = \text{V. R. (বেগ-অনুপাত)}$$

$\therefore$ এই ক্ষেত্রে M. A. = V. R.

উদাহরণমালা

(ক) লিভার:

(১) A straight uniform lever whose weight is 16 lbs. balances, about a point one foot from its mid-point when weights of 6 lbs. and 10 lbs. are suspended from its ends. Find the length of the lever. [C. U. Matric 1916]

লিভারখানির নির্ণেয় দৈর্ঘ্য যেন l ফুট। প্রশ্নানুসারে ইহার আলম্ব-বিন্দু মধ্যবিন্দু হইতে 1 ফুট দূরে। এই আলম্ব-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$6\left(\frac{l}{2}+1\right)+16\times 1=10\left(\frac{l}{2}-1\right),$$

বা, $3l+6+16=5l-10,$

বা, $2l=22+10=32.$

$\therefore \quad l=16$ ফুট।

(২) A second class lever (supposed weightless) 6 ft. in length, carries a load of 12 lbs., placed 4 ft. away from the

fulcrum. Find the pressure on the fulcrum and the mechanical advantage.

লিভারখানি দ্বিতীয়শ্রেণীর বলিয়া উহার একপ্রান্তে চেষ্টা P এবং অপরপ্রান্তে আলম্ব-বিন্দুতে চাপ R সক্রিয়। ∴ $P+R=12$. .... (1)

আবার আলম্ব-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া,

$$6P=12\times 4,$$

$$\therefore \quad P=8.$$

(1)-এ P-র মান বসাইয়া $R=12-8$ বা 4 পাউণ্ড।

$$\therefore \quad \text{যান্ত্রিক সুবিধা}=\frac{W}{P}=\frac{12}{8} \text{ বা } 1\frac{1}{2}.$$

(৩) The mechanical advantage of a weightless third class lever is $\frac{3}{4}$. What effort applied to it will raise a load of 6 lbs. ? If the lever is 8 ft. long, where is the effort applied ?

লিভারখানি তৃতীয়শ্রেণীর বলিয়া উহার একপ্রান্তে ভার অপরপ্রান্তে আলম্ব-বিন্দু।

এখন যান্ত্রিক সুবিধা $=\frac{\text{ভার}}{\text{চেষ্টা}}=\frac{3}{4}$,

বা, $\frac{6}{\text{চেষ্টা}}=\frac{3}{4}$. চেষ্টা $=\frac{6\times 4}{3}$ বা 8 পাউণ্ড।

আলম্ব-বিন্দু হইতে চেষ্টার প্রযোগ-বিন্দু যেন x ফুট দূরে অবস্থিত। এইবার, আলম্ব-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$8x=6\times 8,$$

$$\therefore \quad x=6 \text{ ফুট।}$$

(৪) If two weights balance, about a fixed fulcrum, at the extremities of a straight lever in any position inclined to the vertical, they will balance in any other position.

[C. U. Matric. 1926]

প্রশ্নে বর্ণিত লিভারখানি যেন AB. উহার আলম্ব-বিন্দু C, ভারকেন্দ্র O, ওজন W এবং উহার A ও B প্রান্তস্থিত ওজন দুইটি যথাক্রমে যেন P ও Q.

লিভার উল্লম্বরেখার সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণে নত ও স্থস্থিত রহিয়াছে। C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাটি, A, O ও B বিন্দুগামী উল্লম্বরেখাগুলিকে যথাক্রমে যেন M, L ও N বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

১৩৪নং চিত্র

$$P.MC+W.LC=Q.NC,$$

বা, $P \times AC$ কস $ACM + W \times OC$ কস $ACM = Q \times BC$ কস BCN.

কিন্তু $\angle ACM = \angle BCN$.

$\therefore \quad P \times AC + W \times OC = Q \times BC$.

স্পষ্টতই AC, OC ও BC ধ্রুবক বলিয়া উপরের সমীকরণ উল্লম্বরেখার সহিত লিভারখানির নতি-নিরপেক্ষ। স্থতরাং, উল্লম্বরেখার সহিত অন্যতর যে-কোন কোণে প্রদত্ত ভারসহ লিভারখানি স্থস্থিত হইবে।

(খ) সাধারণ তুলা :

(৫) A tradesman has a false balance. He weighs out goods in equal quantities first from one scale and then from the other. Find his gain or loss in the process when, (a) the arms of the balance are equal in length but the beam is unjustly loaded, (অর্থাৎ তুলাদণ্ডটির ভারকেন্দ্র আলম্ব-বিন্দুগামী উল্লম্বরেখায় অবস্থিত নহে) and when (b) the arms of the balance are of unequal length a and b, but the beam retains horizontal position when scale-pans are not loaded. [U. P. B. 1944]

তুলাটির ওজন w একক এবং উহার আলম্ব-বিন্দু হইতে ভারকেন্দ্রের অনুভূমিক দূরত্ব যেন x একক। W পরিমাণ বস্তুর ওজন প্রথম ও দ্বিতীয়বার মাপে যথাক্রমে যেন W_1 ও W_2 বলিয়া প্রতীয়মান হয়।

(a) তুলাটির বাহু দুইটি সমান ও প্রত্যেকে a একক দীর্ঘ হইলে আলম্ব-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া,

$$Wa + wx = W_1 a \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

এবং $$W_2 a + wx = Wa \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$(W - W_2)a = (W_1 - W)a,$$

বা, $W - W_2 = W_1 - W,$

অর্থাৎ $2W = W_1 + W_2.$

সুতরাং, এক্ষেত্রে কোন লাভক্ষতি নাই।

(*b*) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ভারকেন্দ্র ও আলম্ব-বিন্দু একই উল্লম্বরেখায় অবস্থিত, কিন্তু তুলার বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য *a* ও *b*। এক্ষেত্রে W পরিমাণ বস্তুর ওজন প্রথম ও দ্বিতীয় বার মাপে যথাক্রমে W_1 ও W_2 ধরিয়া আলম্ব-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$Wa = W_1 b \text{ এবং } W_2 a = Wb.$$

$$\therefore \quad W_1 = \frac{Wa}{b} \text{ এবং } W_2 = \frac{Wb}{a}.$$

ব্যবসাদার 2W ওজনের পরিবর্তে $(W_1 + W_2)$ ওজনের মাল দিয়াছে

যেহেতু, $W_1 + W_2 - 2W = \frac{Wa}{b} + \frac{Wb}{a} - 2W$

$$= W\left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab}\right)$$

$$= \frac{W(a-b)^2}{ab} = \text{একটি ধন-সংখ্যা}$$

$(W_1 + W_2) > 2W$. কাজেই, এক্ষেত্রে ক্ষতি হইয়াছে এবং এই ক্ষতির পরিমাণ $= \frac{W(a-b)^2}{ab}$

(৬) A substance, weighed from the two arms successively of a balance, has apparent weights 9 lbs and 4 lbs. Find the ratio of the arms and the true weight of the body.

[U. P. B. 1950]

তুলাটির বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য *a* ও *b* এবং বস্তুটির প্রকৃত ওজন W হইলে,

$Wa = 9b$ ··· ··· ··· (1)

$Wb = 4a$ ··· ··· ··· (2)

$\therefore \quad 4Wa^2 = 9Wb^2,$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{9W}{4W} = \frac{9}{4}.$

$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{3}{2}.$

$\therefore$ বাহুদ্বয়ের অনুপাত $= 3 : 2.$

আবার, (1) ও (2) হইতে,

$W^2ab = 36ab$ বা $W^2 = 36$, অর্থাৎ $W = 6.$

$\therefore$ বস্তুটির প্রকৃত ওজন $= 6$ পাউণ্ড।

(৭) The arms of a false balance, whose weight is neglected, are in the ratio of 8 . 7. If goods be alternately weighed from each arm, show that the seller loses $\frac{25}{28}$ p. c. [U. P. B. 1957]

W ওজনের কোন মাল পর পর দুইটি পাল্লায় রাখিয়া মাপিলে যেন W_1 ও W_2 ওজন দেখায়, তাহা হইলে

$W \times 8 = W_1 \times 7$

এবং $W_2 \times 8 = W \times 7.$

$\therefore \quad W_1 = \frac{8W}{7}$ এবং $W_2 \quad \frac{7W}{}$

স্পষ্টতই, 2W ওজনের স্থলে $(W_1 + W_2)$ ওজনের মাল দেওয়া হয়

$\therefore$ 2W মাল-বিক্রয়ে ক্ষতি $= W_1 + W_2 - 2W = \frac{8W}{7} + \frac{7W}{8} - 2W$

$$= W\left(\frac{8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7}{7 \times 8}\right)$$

$$= \frac{W(8-7)^2}{56} = \frac{W}{56}.$$

2W একক ওজনে ক্ষতি $\frac{W}{56}$ একক।

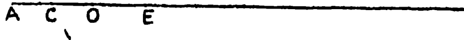
100 একক ওজনে ক্ষতি $= \frac{W \times 100}{56 \times 2W}$ বা $\frac{25}{28}.$

$\therefore$ বিক্রেতার $\frac{25}{28}\%$ ক্ষতি হয়।

(গ) রোমান স্টীলইয়ার্ড :

(৮) A Roman steelyard $1\frac{1}{2}$ ft. in length and 2 lbs. 4 oz. in weight has its C. G. and the fulcrum 1 inch and $1\frac{1}{2}$ inches, respectively, away from one end. If the rider is 12 oz., find (i) the distance between two consecutive pound-marks, (ii) the distance of the $4\frac{1}{2}$ lb.-mark from the zero-mark, and (iii) the maximum weight that can be measured by the steelyard.

স্টীলইয়ার্ডখানি AB ; উহার A প্রান্ত হইতে ভারকেন্দ্র G 1 ইঞ্চি ও আলম্ব-বিন্দু C $1\frac{1}{2}$ ইঞ্চি দূরে অবস্থিত। A প্রান্তলগ্ন পাল্লায় যখন কোন ভার থাকে না তখন স্টীলইয়ার্ডের ওজন এবং শূন্যদাগে অবস্থিত উহার সূচকভার (rider) সাম্যাবস্থায় থাকে। ঐ শূন্যদাগ যেন O বিন্দু দ্বারা সূচিত হয়।



১৩৫(ক) নং চিত্র

স্টীলইয়ার্ডের ওজন = 2 পা. 4 আ. = $2\frac{1}{4}$ বা $\frac{9}{4}$ পা.

$$GC = AC - AG = (1\tfrac{1}{2} - 1) \text{ বা } \tfrac{1}{2} \text{ ইঞ্চি।}$$

সূচকভার = 12 আ. = $\frac{3}{4}$ পা.।

$$\therefore \quad \frac{9}{4} \times GC = \frac{3}{4} \times OC \text{ বা } \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot OC.$$

$$\therefore \quad OC = \frac{9}{4 \times 2} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \text{ ইঞ্চি।}$$

(i) 1 পাউণ্ড-দাগটি যদি E বিন্দু দ্বারা সূচিত হয়, তবে

$$\text{আমরা জানি } OE = \frac{W}{P} \times AC.$$

এখানে W = 1 পা., P = $\frac{3}{4}$ পা. এবং AC = $\frac{3}{2}$ ইঞ্চি বলিয়া

$$OE = \frac{1}{\frac{3}{4}} \times \frac{3}{2} \text{ বা } \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \text{ বা } 2 \text{ ইঞ্চি।}$$

অর্থাৎ পর পর দুইটি পাউণ্ড-মার্কের ব্যবধান 2 ইঞ্চি।

(ii) আবার, $4\frac{1}{2}$ পাউণ্ড-দাগটি যদি X বিন্দুতে হয়, তবে

$$OX = \frac{W}{P} \times AC \text{ বা } OX = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{4}} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \text{ ইঞ্চি}$$

বা 9 ইঞ্চি।

∴ শূন্যদাগ হইতে $4\frac{1}{2}$ পা.-দাগের দূরত্ব 9 ইঞ্চি।

(iii) স্টীলইয়ার্ডের শেষপ্রান্তে সূচক ভারটিকে সরাইয়া পাল্লার উ যে পরিমাণ ভার ধারণ করিলে উহা অনুভূমিক রেখায় সুস্থিত হয়, তাঃ সর্বাপেক্ষা বেশী ভার (যাহা এই যন্ত্রে মাপা যাইতে পারে)। এই ভার যদি হয়, তবে

$$OB = \frac{W}{P} \times AC \text{ বা } W = \frac{OB}{AC} \times P \;;$$

$$OB = AB - AO = 18 - (AC + OC) = 18 - (1\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2}),$$

বা. 18 − 3, বা, 15 ইঞ্চি।

$$W = \frac{15}{[illegible]} \times \frac{3}{[illegible]} = 15 \times \frac{2}{[illegible]} \times [illegible]$$

বা $\frac{15}{2}$ বা $7\frac{1}{2}$ পাউণ্ড।

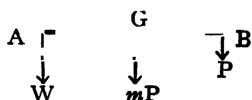
(৯) If the beam of a common steelyard be uniform and its weight be m times the movable weight P, and the fulcrum one-nth part of the length of the beam from the end where the weight is suspended, show that the greatest weight that can be weighed is $\frac{1}{2}\{(2n-2)+m(n-2)\}P$. [P. U. 1938]

বর্ণিত স্টীলইয়ার্ডখানি **সমসত্ত্ব** বলিয়া উহার ভারকেন্দ্র G উহার দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দুতে অবস্থিত। প্রশ্নানুসারে উহার ওজন $= mP$। উহার A প্রান্তে পাল্লা-ঝুলানো আলম্ব-বিন্দু C এবং সমগ্র দৈর্ঘ্য l ধরিলে,

$AC = \frac{l}{n}$। অপর প্রান্ত B-তে সূচক ভারটি সরাইয়া পাল্লায় যে পরিমাণ ভার n রাখিলে স্টীলইয়ার্ডখানি অনুভূমিক রেখায় সুস্থিত হয়, তাহাই এই যন্ত্রে পরিমাপযোগ্য গরিষ্ঠ ভার।

স্পষ্টতই, $AC = \frac{l}{n}$, AG BG $\frac{l}{2}$.

$$W.AC = mP.GC + P.BC$$
$$= mP(AG - AC) + (AB - AC)P$$
$$W.\frac{l}{n} = mP\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{n}\right) + \left(l - \frac{l}{n}\right)P$$
$$= Pl\left\{m\left(\frac{n-2}{2n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$
$$= \frac{l}{2n}\left\{m(n-2) + (2n-2)\right\}P.$$
$$W = \frac{1}{2}\left\{(2n-2) + m(n-2)\right\}P.$$



(১০) A shopman, using a common steelyard, alters the movable weight for which it is graduated. Does he cheat himself or his customer ? [P. U. 1933, 1943]

ধরা যাক, দোকানদারটির স্টীলইয়ার্ডখানি AB। উহার পাল্লা A বিন্দুতে, ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে ও আলম্ব C বিন্দুতে অবস্থিত এবং উহার ওজন w। পাল্লায় W ভার রাখিলে সূচক ভারটিকে X বিন্দুতে সরাইয়া যেন স্থিতি আনা যায়। তাহা হইলে C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া,

$$W.AC + w.GC = P.OX.$$

এখানে w.GC, AC এবং OX ধ্রুবক। কাজেই Pএর মান বাড়িলে Wএর মানও বাড়িবে। কিন্তু X বিন্দুদ্বারা সূচিত ভার নির্দিষ্ট বলিয়া W আসল ওজন অপেক্ষা বেশী হইবে। সেক্ষেত্রে দোকানদার নিজেই ঠকিবে।

অনুরূপে Pএর মান কমিলে Wএর মান X দ্বারা সূচিত মান অপেক্ষা কম হইবে। স্পষ্টতই সেক্ষেত্রে দোকানদার ক্রেতাকে ঠকাইবে।

চক্র ও অক্ষদণ্ড :

(১১) The mechanical advantage of a wheel and axle is 5. If an effort of 4 lbs. raises a weight through 25 ft., find the weight and the work done by the weight against gravity.

ভার W, চেষ্টা P এবং চক্র ও অক্ষের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a ও b হইলে,

$$\frac{W}{P} = \frac{a}{b} = \text{যান্ত্রিক সুবিধা।}$$

এক্ষেত্রে $\frac{W}{P}=5$ বা $W=5P=5\times4$ বা **20 পাউণ্ড।**

$\therefore$ 20 পাউণ্ডের 25 ফুট উঠিতে অভিকর্ষজ বলের বিরুদ্ধে কৃত কার্য

$=20\times25$ বা **500 ফুট-পাউণ্ড।**

(১২) The radius of the wheel is four times that of the axle of a wheel and axle. If an effort of 10 lbs. raises a weight through 11 ft. in 7 complete turns, find (i) the weight, and (ii) the radii of the wheel and the axle. (iii) If the rope of the machine is 1 inch thick, what weight would the same effort raise ?

নির্ণেয় ভার W পাউণ্ড এবং অক্ষের ব্যাসার্ধ যেন b, তাহা হইলে চক্রের ব্যাসার্ধ $4b$.

(i) $\frac{W}{10}=\frac{4b}{b}=4.$ $\therefore$ **W = 40 পাউণ্ড।**

(ii) 7 চক্করে অক্ষদণ্ডে $7\times2\pi b$ একক দড়ি পেঁচায় এবং তাহাতে ভারটি 11 ফুট উপরে উঠে।

$\therefore$ $7\times2\times\frac{22}{7}b=11$ ফুট $=11\times12$ ইঞ্চি।

$\therefore$ $b=\frac{11\times12}{44}$ বা 3 ইঞ্চি।

$\therefore$ চক্রের ব্যাসার্ধ $=4\times3$ বা 12 ইঞ্চি।

(iii) দড়ির বেধ যদি 1 ইঞ্চি হয় তবে উহার ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি। সেক্ষেত্রে, **চক্র ও অক্ষ উভয়েরই ব্যাসার্ধ** $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পরিমাণ বড় ধরিতে হইবে।

$\therefore$ $\frac{W}{10}=\frac{12\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}$, বা, $W=\frac{250}{7}$ বা **$35\frac{5}{7}$ পাউণ্ড।**

অনুশীলনী ২১

1. The arms of a straight uniform lever of the first class, supposed to be weightless, are in the ratio of 3 : 2. If the difference of the weights at the ends balancing each other be 3 lbs., find the weights. If the weights interchange the positions

what additional weight will be required for balance and to which weight should it be added ?

2. A lever of the first class, 10 ft in length and 10 lbs. in weight, has its C G 4 ft. away from one of its ends. If its middle point is made the fulcrum, what weight at the heavier end would balance 12 lbs. at the other ?

3. The mechanical advantage of a lever of the second class is $1\frac{3}{5}$ and the pressure on the fulcrum is 8 lbs. when a weight Q is balanced by an effort P. Find P and Q.

4. A weightless lever of the second class is 16 ft. long. What effort will be needed to raise a load of 20 lbs. placed 4 ft. away from the fulcrum ? If the distance between the effort and the weight is reduced to 10 ft., what effort will raise the same load ?

5. A man has to exert a downward pressure of 140 lbs. on one end of a horizontal crowbar for raising a heavy block by the other end If the crowbar is $5\frac{1}{2}$ ft. long and if the block is $\frac{1}{2}$ ft. away from the fulcrum, find the upward pressure on the block and also that on the block.

6. A pair of nutcrackers is 4 inches long. Where must a nut be placed inside it, so that a force of $1\frac{1}{2}$ lbs. applied to each arm may crack the nut, supposing that the nut cracks when each arm exerts a pressure of 12 lbs. on it ?

7. In a lever of the third class a weight of 4 lbs is held by a power P. If the pressure on the fulcrum is 16 lbs , and the length of the lever is 10 ft., find the value of P and the distance of the power from the fulcrum.

8. The arms of a balance are $7\frac{1}{2}$ and $7\frac{5}{8}$ inches long, and the scale-pans balance when empty. How much would a customer gain or lose in what was weighed as a pound of tea ?
[C. U. I. Sc. 1954]

9. The lever of a false balance is 3 ft. long, and if a body is placed in one scale-pan, it weighs 4 lbs. and in the other weighs 6 lbs. 4 oz., find the true weight. of the body and the length of the two arms. [H. S. B. S. E. 1961]

10. A body, placed in a scale-pan, is balanced by 10 lbs. placed in the other pan ; when the positions of the body and the weight are interchanged, 11 lbs. are required to balance the body. If the length of the shorter arm be 12 in., find the length of the longer arm and the weight of the body.
[B. H. U. 1953]

11. A piece of iron in one pan A of a balance is counterpoised by 100 lbs. in the pan B. When the same piece of iron is put into the pan B, it requires 102·01 lbs. in A to balance it. What is the ratio of the lengths of the arms of the balance ? [U. P. B. 1956]

12. The beam of a false balance is 38 inches long, and a certain body when placed in one scale-pan appears to weigh 5 lbs. 1 oz., and in the other 6 lbs. 4 oz. Find the true weight of the body and the lengths of the arms of the balance. [C. U. Matric. 1931]

13. A body weighed from the two arms, successively of a balance, have apparent weights 8 lbs. and 9 lbs. Find the ratio of the lengths of the arms of the balance. [U. P. B. 1954]

14. A substance weighed from the two arms successively of a false balance has apparent weights 9 and 4 lbs. Find the ratio of the lengths of the arms and the true weight of the body. [P. U. 1930 ; U. P. B. 1950]

15. The beam of a false balance is 3 ft. long and is horizontal when the scale-pans are empty. A certain body placed in one scale-pan weighs 4 lbs. and in the other weighs 6 lb. 4 oz. Find the true weight of the body and the lengths of the arms of the balance. [U. P. B. 1951]

16. The arms of a false balance are in the ratio of 10 : 9 and the pans are of unequal weight in such a way that the beam remains horizontal when the pans are empty. If goods are weighed half in one pan and half in the other, prove that the seller loses $\frac{5}{9}$ per cent. [B. H. U. 1956]

17. The arms of a balance are as 14 : 15, and a commodity is weighed alternately in its two pans. Find the loss per cent to the seller. [P. U. 1945]

18. The arms of a false balance are in the ratio of 20 : 21. How much does a trader gain or lose if he places articles to be weighed at the end of the shorter arm, when he is asked for 4 seers of potatoes at 5 annas per seer ? [P. U. 1936]

19. If the distance of the C.G. of the beam of a common steelyard from the fulcrum is 2 inches, the movable weight 4 ozs., and the weight of the beam 2 lbs., find the distance of the zero graduation from the C.G. [A. U. 1928]

20. The distance of the heavier end of a common steelyard from the fulcrum is $2\frac{1}{2}$ inches. If the movable weight is $\frac{1}{2}$ lb., find the distance between two consecutive pound-marks.

21. The beam of a common steelyard is uniform and weighs 2 lbs. 4 oz. If its rider is 4 oz. in weight and if the distance of the end holding the scale-pan from the fulcrum is $\frac{1}{12}$ of the length of the beam, find the greatest weight that can be measured by it.

22. In a wheel and axle, the weight is four times the power and the radius of the axle is 3 inches. Find the radius of the wheel, the weight, and the power.

23. In a wheel and axle, a power of 3 lbs. holds a wt. of 16 lbs. If the radius of the wheel is $1\frac{1}{3}$ ft., find the radius of the axle.

24. The mechanical advantage of a wheel and axle is 5, and the difference between the radii of the wheel and the axle is 16 inches, find the radii.

25. In a wheel and axle, if the radius of the wheel be 6 times that of the axle, and if by means of an effort equal to 5 lbs. wt. a body be lifted through 50 ft., find the amount of the work expended. [P. U. 1932 ; B. H. U. 1954]

26. The radius of the wheel being three times that of the axle, find how far the weight will be lifted when the power is pulled down through the space of one foot. [C. U. 1922]

27. The radii of the wheel and the axle are 18″ and 3″ respectively. A man weighing 160 lbs. sits on a platform, weighing 162 lbs., attached to the rope round the axle. If the man can now support himself by holding the rope passing over the wheel, find the tension of the rope.

28. The radii of the wheel and the axle of a wheel are respectively 24″ and 4″. If the rope of the machine is $1\frac{1}{4}$″ thick, find the weight supported by an effort of 12 lbs.

(খ) নততল, গোঁজ ও স্ক্রু (Inclined plane, Wedge and Screw)

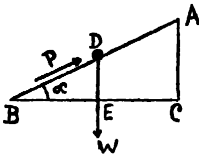
১২৫। **নততল (Inclined plane):** নততলের সাহায্যে গুরুভার বস্তুকে অল্প আয়াসে উপরে তোলা যায়। উদাহরণস্বরূপ, একটা ভারী পেটিকে

সরাসরি উপরে তুলিতে উহার ভারের সমান বল প্রয়োগ করিতে হয়, কিন্তু একটি মসৃণ ও দৃঢ় তক্তাকে ভূমির সহিত একটা কোণে দৃঢ়ভাবে স্থাপিত করিয়া তাহার উপর দিয়া পেটিখানি ঠেলিয়া তুলিতে অনেক কম বল প্রয়োগ করিতে হয়; আর সেইভাবে বলপ্রয়োগ সুবিধাজনকও বটে। বলা বাহুল্য এইভাবে স্থাপিত তক্তাখানি একটি নততল। ইহা যন্ত্রের কাজ করে।

যন্ত্রহিসাবে বিচার করিবার সময় আপাতত নততলকে আমরা সম্পূর্ণ মসৃণ বলিয়াই ধরিব। তাহা হইলে নততলের বেলাতেও কার্যতত্ত্ব (principle of work) প্রযোজ্য হইবে।

১২৬। নততলের উপর প্রযুক্ত চেষ্টা ও ভার :

(১) নততল বরাবর ঊর্ধ্বমুখে প্রযুক্ত চেষ্টা ও নততলস্থিত ভারের সম্পর্ক (Relation between the effort acting up a plane and the weight placed on the inclined plane) :



১৩৬নং চিত্র

a-নতিকোণ-সম্পন্ন BA নততলটি বরাবর ঊর্ধ্ব-মুখে প্রযুক্ত P বলটি যেন W ভারটিকে D বিন্দুতে উঠাইয়াছে। BC ভূমি হইতে ভারটির উল্লম্বদিকে সরণ ED পরিমাণ (যেখানে DE, ভূমি BC-র উপর লম্ব) এবং চেষ্টা P-এর প্রয়োগ-বিন্দুর তল বরাবর সরণ BD পরিমাণ। সুতরাং, কার্যতত্ত্বের নিয়মে,

চেষ্টার কার্য = বাধার কার্য ;

অর্থাৎ $P.BD = W.ED$.

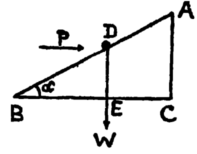
$$\therefore \text{ যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = \frac{BD}{DE} = \frac{BA}{AC} = \frac{\text{নততলের দৈর্ঘ্য}}{\text{নততলের উন্নতি}}।$$

$$\text{দ্বিতীয়ত, বেগ-অনুপাত (V. R.)} = \frac{\text{তল বরাবর P এর সরণ}}{\text{ভারের ক্রিয়ারেখায় W এর সরণ}}$$

$$= \frac{BD}{DE} = \frac{BA}{AC};$$

যান্ত্রিক সুবিধা = বেগ-অনুপাত

(২) নততলের উপর প্রযুক্ত অনুভূমিক চেষ্টা ও ভারের সম্পর্ক (Relation between the horizontal effort and the weight on an inclined plane) :



১৩৭নং চিত্র

অনুভূমিক চেষ্টা P যেন BA নততলে ভার W-কে B হইতে D পর্যন্ত অর্থাৎ ভূমি হইতে উল্লম্ব-দিকে ED উচ্চতায় তোলে। তলটির নতিকোণ a হইলে, আমরা জানি, তল ববাবর P-এর বিশ্লেষিতাংশ = P কস।

তল বরাবর চেষ্টার কার্য = P কস a . BD

এবং ভারের বিরুদ্ধে কার্য = W.DE.

∵ চেষ্টার কার্য = ভারের বিরুদ্ধে কার্য ;

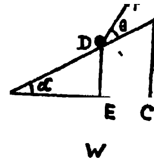
∴ BD . P কস a = W.DE ;

অতএব, যান্ত্রিক সুবিধা $= \frac{W}{P} = \frac{BD}{DE}$ কস $a = \dfrac{\text{কস } a}{\frac{DE}{BD}}$

$= \dfrac{\text{কস } a}{\text{সাইন } a}$ = কট $a = \frac{BC}{AC}$,

বা, $\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{নততলের উন্নতি}}$ ।

(৩) নততলের উপর তলের সহিত θ-কোণে প্রযুক্ত চেষ্টা ও ভারের সম্পর্ক (Relation between the effort acting at an angle with the inclined plane and the weight) :



১৩৮নং চিত্র

BA নততলে নতিকোণ a. BAর সহিত θ-কোণে প্রযুক্ত P চেষ্টা যেন W ভার উল্লম্বদিকে ED উচ্চতায় তলের উপব D বিন্দুতে তুলিযাছে।

তল বরাবর P এর বিশ্লেষিতাংশ P কস θ।

∴ চেষ্টার কার্য = বাধার কার্য।

এখানে, তল বরাবর চেষ্টার কার্য = BE . P কস θ

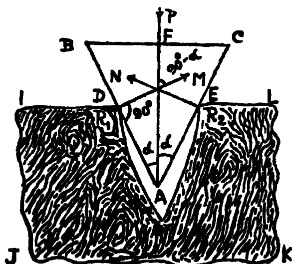
এবং বাধা ভারের বিরুদ্ধে কার্য = W.DE.

$\therefore$ P.BD . কস θ = W.DE.

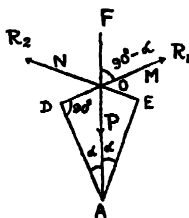
$$\therefore \text{ যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = \frac{BD}{DE} \text{কস } \theta = \frac{\text{কস } \theta}{\frac{DE}{BD}}$$

$$= \frac{\text{কস } \theta}{\text{সাইন } \alpha} \text{ ।}$$

১২৭। গোঁজ (Wedge)ঃ গোঁজ (বা কীল) বলিতে দুইটি মসৃণ-তলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজাকৃতি বস্তুকে বুঝায়। গোঁজের সম্মুখতল একটি ত্রিভুজ এবং এই ত্রিভুজ প্রায়ই সমদ্বিবাহু। কাঠের মতো বস্তুকে চিরিবার জন্য বা দুইটি বস্তুকে পরস্পর হইতে বিচ্ছিন্ন করিবার জন্য অথবা গুরুভার বস্তুকে মাটি হইতে একটু উপরে তুলিবার জন্য গোঁজের ব্যবহার হয়। গোঁজ আসলে একই নতি-সম্পন্ন দুইটি মসৃণ নততলের সমন্বয়ে গঠিত। এইরূপ তল দুইটির ভূমি গায়ে গায়ে সাঁটিয়া দিলে শীর্ষ দুইটি মিলিয়া একটি সূচীমুখ সৃষ্টি হয়। উহাদের উচ্চতা একই রেখায় মিলিয়া যায়; এইভাবে অনুভূমিক যে একটি তল সৃষ্টি হয় উহাই গোঁজের ভূমি। মসৃণ গোঁজের বেলায় ঘর্ষণ নাই বলিয়াই ধরা হয়।



১৩৯নং চিত্র



১৩৯(ক) নং চিত্র

IJKL বস্তুটির মধ্যে অনুভূমিক BC এর উপরে P বলের ক্রিয়ায় BAC গোঁজখানি ঢুকিয়া গিয়াছে। বস্তুটির D ও E বিন্দু মাত্র গোঁজের মসৃণ তল স্পর্শ করিয়া আছে। P বল তাহা হইলে FA উল্লম্বরেখায় এবং মসৃণ তল

BA ও CAর উপর লম্ব-প্রতিক্রিয়া R_1 ও R_2 যথাক্রমে DO এবং EO রেখায় সক্রিয় হইবে। স্পষ্টতই বস্তুটি যখন স্থিতিশীল তখন R_1, R_2 ও P বলের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুতে মিলিত। এখন BAC সমদ্বিবাহু এবং $\angle ABC = 2a$ হইলে, $\angle BAF = \angle CAF = a$ $\angle ODA = 90°$ বলিয়া $\angle DOA = \angle FOM = 90° - a$ অনুরূপে $\angle FON = 90° - a$ তাহা হইলে FA উল্লম্ব-রেখায় R_1 ও R_2 বল দুইটির বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে R_1 কস $(90° - a)$ ও R_2 কস $(90° - a)$, অথবা যথাক্রমে R_1 সাইন a ও R_2 সাইন a.

সুতরাং, P চেষ্টা বা বলের প্রয়োগে গোঁজখানি যদি কখনো x ফুট নিচে নামে, তবে P বলের প্রয়োগ-বিন্দু x ফুট নামে এবং সমবেত বাধার প্রয়োগ-বিন্দুও উহাদের গতিমুখের বিরুদ্ধে x ফুট সরে। কার্যতত্ত্ব অনুসারে,

P চেষ্টার কার্য = R_1 ও R_2 বাধার বিরুদ্ধে সমবেত কার্য

অর্থাৎ $P\,x = R_1$ সাইন $a\,x + R_2$ সাইন $a\,x$

$= (R_1 + R_2)$ সাইন $a\,x$,

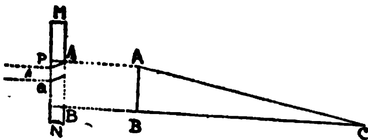
যান্ত্রিক সুবিধা $= \dfrac{(R_1 + R_2)}{P} = \dfrac{x}{\text{সাইন } a\,x} =$ কোসেক a

গোঁজের আকৃতি প্রায়ই সমদ্বিবাহুর মতো বলিয়া R_1 ও R_2 বাধা পরস্পর সমান হয়। সেক্ষেত্রে, $\dfrac{2R}{P} =$ কোসেক a.

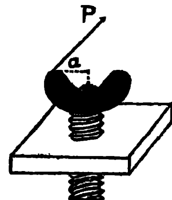
আমরা জানি, a-র মান যতই কমে কোসেক a-র মান ততই বাড়ে। কাজেই, এক্ষেত্রে গোঁজখানির শীর্ষকোণ $2a$ যত ছোট হইবে ততই যান্ত্রিক সুবিধা বাড়িতে থাকিবে। এইভাবে তত্ত্বের দিক দিয়া $2a = 0$ হইলে যান্ত্রিক সুবিধা সবচেয়ে বেশী হওয়ার কথা। কিন্তু সেক্ষেত্রে গোঁজখানি উল্লম্বতলে পরিণত হয়। অতএব, কার্যক্ষেত্রে গোঁজখানির দৃঢ়তা বুঝিয়া উহার শীর্ষকোণটি যথাসম্ভব ছোট করিয়া লইলেই সর্বাপেক্ষা বেশী যান্ত্রিক সুবিধা পাওয়া যায়।

১২৮। স্ক্রু (Screw)ঃ একটি বৃত্তাকার পৃষ্ঠযুক্ত যে স্তম্ভকের গায়ে ঘোরানো প্যাঁচের মতো খাঁজ-কাটা থাকে, তাহাকে স্ক্রু বলে। স্ক্রু আসলে

নততলের বিশেষ সংস্করণ। নিচে স্ক্রু-তৈরীর বিবরণ দেওয়া হইতেছে। ঐ বিবরণ হইতে এই কথার সত্যতা বুঝা যাইবে।



১৪০নং চিত্র



১৪০(ক) নং চিত্র

একটুকরা কাগজে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC-র আকারে কাটিয়া MN নলটির চারিদিকে এমনভাবে জড়ানো হইল যে, ত্রিভুজটির উচ্চতা BA রেখা নলটির দৈর্ঘ্য বরাবর থাকে এবং BC ভূমি বৃত্তাকারে নলের চারিদিকে প্যাঁচাইয়া যায়। প্রত্যক্ষ হইবে যে, AC অতিভুজ নলের গায়ে ঘোরানো সিঁড়ির মতো প্যাঁচাইয়া উপরে উঠিয়া গিয়াছে। AC প্যাঁচটিকে যদি এইবার নলের পৃষ্ঠ হইতে আধ-সুতা উঁচু কল্পনা করা যায়, তবে স্পষ্টতই ইহা একটি স্ক্রু সৃষ্টি করে।

স্ক্রু-র পাশাপাশি দুইটি প্যাঁচের মধ্যে লম্বদিকে দূরত্বকে ধাপ (step বা pitch) বা থাক বলা যায়। উদাহরণস্বরূপ ১৪০নং চিত্রে PQ স্ক্রু-খানির এক ধাপ বা থাক।

১৪০(ক)নং চিত্রে একটি সাধারণ নাট-বল্টু দেখানো হইয়াছে। এখানে স্ক্রু-খানির ধাপ যেন b. স্ক্রু-র হাতলটিতে P বল প্রয়োগ করিলে উহা ধাপে ধাপে নামিতে থাকিবে। এইভাবে ঘুরিবার সময় হাতলের উপর P-র প্রয়োগ-বিন্দু P বলের দিকে বৃত্তপথে পাক খাইবে। ঐ প্রয়োগ-বিন্দু হইতে বল্টুর অক্ষ পর্যন্ত দূরত্ব যদি a হয়, তবে P-এর গতিপথ a ব্যাসার্ধযুক্ত একটি বৃত্ত। সুতরাং, বল্টুখানি একপাক ঘুরাইতে P-বল $2\pi a$. P একক কার্য করিবে। এদিকে বল্ট যেই একপাক ঘুরিবে অমনি উহা নিচদিকে একধাপ বা b একক দূরত্ব নামিয়া যাইবে। বল্টুর ভার যদি W হয়, তবে স্পষ্টতই নাটখানির বাধাও W পরিমাণ, কারণ বল্টুখানি অচল থাকিলে নাটের উপর উহার ভার W এবং এই ভারের

বিরুদ্ধে নাটের সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া কাজ করে। কাজেই নাটের বাধারও মান W একক। সুতরাং বল্টুখানি b একক নামিবার সময় নাটের বাধার বিরুদ্ধে $W.b$ একক কার্য সম্পন্ন হয়। কার্যতত্ত্ব অনুসারে,

চেষ্টাব কার্য = বাধার কার্য।

$$\therefore \quad 2\pi a . P = W.b.$$

$$\therefore \quad \text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = \frac{2\pi a}{b}$$

$$= \frac{\text{চেষ্টাব আবর্তনপথের পরিধি}}{\text{স্ক্রু-র ধাপ}}।$$

উদাহরণমালা

(ক) নততল :

(১) What mass may be supported on a smooth inclined plane 3 in 5, by an effort of 12 lbs., if the latter acts (i) up the plane, (ii) horizontally, (iii) at an angle of 30° to the length of the plane ?

নততলটির দৈর্ঘ্য, উচ্চতা ও ভূমি যথাক্রমে যেন l, h ও b.

প্রশ্নানুসারে নততলটির $\frac{\text{উচ্চতা}}{\text{দৈর্ঘ্য}} = \frac{3}{5} = \frac{h}{l}$,

$$\text{বা,} \quad h = \frac{3l}{5};$$

$$b = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{l^2 - \frac{9l^2}{25}} = \sqrt{\frac{16l^2}{25}} = \frac{4}{5}l.$$

$$\therefore \quad \frac{b}{h} = \frac{\frac{4}{5}l}{\frac{3}{5}l} = \frac{4}{3}.$$

(i) 12 পা. বলটি যখন তল বরাবর উর্ধ্বমুখে কাজ করে, তখন

$\frac{W}{P} = \frac{l}{h}$ সূত্র অনুসারে,

$\frac{W}{12} = \frac{5}{3}$, $\therefore$ $W = 12 \times \frac{5}{3}$ বা **20 পাউণ্ড।**

(ii) দ্বিতীয়ত, বলটি যদি অনুভূমিক হয়, তবে

$\frac{W}{P}=\frac{b}{h}$ সূত্র অনুসারে,

$\frac{W}{12}=\frac{4}{3}$; $\therefore$ $W=12\times\frac{4}{3}$ বা **16 পাউণ্ড।**

(iii) তৃতীয়ত, বলটি যদি তলের সহিত 30° কোণে সক্রিয় হয়, তবে

$\frac{W}{P}=\frac{\text{কস }\theta}{\text{সাইন }\alpha}$ সূত্রে,

কস θ = কস $30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

এবং সাইন $\alpha=\frac{h}{l}=\frac{3}{5}$ [$\because$ তলটির নতিকোণই α] বসাইয়া,

$$\frac{W}{12}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{5}}.$$

$\therefore$ $W=\overset{2}{\cancel{12}}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\frac{5}{\cancel{3}}$ বা **$10\sqrt{3}$ পাউণ্ড।**

(২) A mass of 20 lbs. is held at rest on a smooth plane inclined at 30° to the horizon, by two forces, one equal to 7 lbs. acting up the plane and the other P lbs. acting at 60° with the plane. Find P.

আমরা জানি নততল বরাবর 20 পা. ভারে নিম্নমুখী উপাংশ = 20 সাইন 30° বা. $20\times\frac{1}{2}$ পাউণ্ড = 10 পাউণ্ড। আবার নততল বরাবর P বলের ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ = P কস 60° বা $\frac{P}{2}$ পাউণ্ড।

প্রশ্নানুসারে নততল বরাবর ঊর্ধ্বমুখে মোট বল $=\left(7+\frac{P}{2}\right)$ পা.

$$7+\frac{P}{2}=10, \text{ বা, } \frac{P}{2}=3,$$

$\therefore$ $P=6$ পাউণ্ড।

(খ) গোঁজ ঃ

(৩) The sides of a smooth wedge isosceles in shape are as 14 : 26 : 26. If a force of 35 lbs. applied to the base drives it into a block of stone, what is the resistance at each side of the wedge ?

গোঁজখানির শীর্ষকোণ যদি $2a$ হয়, তবে স্পষ্টতই

$$\text{কোসেক } a = \frac{26}{\frac{1}{2} \times 14} \text{ বা } \frac{26}{7}.$$

প্রত্যেক বাহুতে বাধা যদি R হয়, তবে

$$\frac{2R}{P} = \text{কোসেক } a \text{ সূত্র অনুসারে,}$$

$$R = \frac{P \text{ কোসেক } a}{2} = \frac{\overset{5}{\cancel{35}} \times \overset{13}{\cancel{26}}}{\cancel{2} \times \cancel{7}} \text{ বা } \mathbf{65} \textbf{ পাউণ্ড।}$$

(গ) স্ক্রু ঃ

সূত্র ঃ $\frac{W}{P} = \frac{2\pi a}{b}$, যেখানে W = ভার বা বাধা ;

P = চেষ্টা বা বল ; a = চেষ্টার বাহু ; b = স্ক্রু-র থাক।

নাট-বল্টু ছাড়া স্ক্রু-র অনেকরকম ব্যবহার আছে। এখানে আমরা স্ক্রু-জ্যাক-জাতীয় দুই-একটি যন্ত্রের মাত্র আলোচনা করিব। স্ক্রু-জ্যাক যন্ত্রের অক্ষটি প্যাচ-কাটা। উহার নিচে অক্ষের সহিত লম্বভাবে একটা হাতল বা বাহু থাকে। ঘানিগাছের মতো এই বাহুকে ঠেলিয়া ঘোরাইতে থাকিলে, যন্ত্রটি সর্পিল গতিতে উপরে উঠে।

বলা বাহুল্য, উপরের সূত্রে W, P, a ও b এই চারিটির মধ্যে যে-কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে অনায়াসে চতুর্থটি বাহির করা যায়। কিন্তু এই প্রসঙ্গে ছাত্রদের কখনও কখনও দুই-একটি ইংরেজী শব্দগুচ্ছ বা phrase-এর অর্থ বুঝিতে কষ্ট হইতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, **"5-threads to the inch"** মানে প্রতি এক ইঞ্চিতে পাঁচটি প্যাচ। তার অর্থ স্ক্রু-র 5 থাকে 1 ইঞ্চি অর্থাৎ এক **থাক = $\frac{1}{5}$ ইঞ্চি।** **"A screw marks 5 complete turns in one inch"** মানেও এক ইঞ্চিতে 5 থাক বা 1 **থাক = $\frac{1}{5}$ ইঞ্চি।**

(৪) A screw having 4-threads to the inch has its power arm equal to $1\frac{3}{4}$ ft. What force applied to the end of the arm will raise a mass of 44 lbs. ?

এখানে চেষ্টার বাহু $a = 1\frac{3}{4}$ ফুট বা 21 ইঞ্চি।

থাক $b = \frac{1}{4}$ ইঞ্চি

ভার = 44 পাউণ্ড।

$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{2\pi a}{b}$ সূত্র অনুসারে,

$$P = \frac{bW}{2\pi a} = \frac{\frac{1}{4} \times 44}{2 \times \frac{22}{7} \times 21} \text{ পা.} = \frac{11}{2 \times \frac{22}{2} \times 3} \text{ বা } \frac{1}{12} \text{ পা.।}$$

(৫) In a screw-jack the effort E required to lift a load W is applied at the end of a handle which describes a circle of radius 14 in. The pitch of the screw is $\frac{1}{3}$ in. What is the velocity ratio ?

An effort of 10 lbs. lifts a load of 600 lbs. What is the efficiency with this load ?

If the efficiency is 30 per cent, when the load is 1,500 lbs., what effort is needed to lift the load ?

[Oxford & Cambridge]

এখানে চেষ্টার বাহু 14 ইঞ্চি এবং থাক = $\frac{1}{3}$ ইঞ্চি। চেষ্টা যে সময়ে $2\pi \times 14$ ইঞ্চি অতিক্রম করে ভার সেই সময়ে $\frac{1}{3}$ ইঞ্চি উপরে উঠে।

$$\text{বেগানুপাত} = \frac{\text{চেষ্টা দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{ভার দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব}}$$

$$= \frac{2 \times \frac{22}{7} \times 14}{\frac{1}{3}} = 88 \times 3 = 264.$$

দ্বিতীয়ত, দক্ষতা $= \frac{\text{যান্ত্রিক সুবিধা}}{\text{বেগানুপাত}}$

10 পা. বল 600 পা. তুলিলে,

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{600}{10}\left(= \frac{W}{P}\right) = 60.$$

$\therefore$ নির্ণেয় দক্ষতা $= \frac{60}{264} = \frac{15}{66} \times 100\%$

$= 22{\cdot}7\%.$

তৃতীয় ক্ষেত্রে নির্ণেয় বল যদি P পাউণ্ড হয়, তবে সেক্ষেত্রে

যান্ত্রিক সুবিধা $= \frac{1500}{P}$

দক্ষতা $= \frac{\text{যান্ত্রিক সুবিধা}}{\text{বেগানুপাত}}$;

$$\frac{\frac{1500}{P}}{264} = 30\% = \frac{30}{100},$$

বা, $1500 \times 10 = P \times 264 \times 3,$

বা, $P = \frac{15000}{264 \times 3} = 18\frac{31}{33}$ পাউণ্ড।

(৬) The efficiency of a screw-jack is 30%. If an effort of 5 lbs. applied to the machine can raise a load of 75 lbs., find out the velocity ratio.

দক্ষতা $= \frac{\text{যান্ত্রিক সুবিধা}}{\text{বেগানুপাত}}$ ।

এখানে, দক্ষতা $= 30\% = \frac{30}{100}$ বা $\frac{3}{10}$

এবং যান্ত্রিক সুবিধা $= \frac{75}{5}$ বা 15.

$\therefore$ $\frac{3}{10} = \frac{15}{\text{বেগানুপাত}}$ ।

$\therefore$ নির্ণেয় বেগানুপাত $= 15 \times \frac{10}{3} = 50.$

অনুশীলনী ২২

1. (i) What mass may be kept at rest on a smooth inclined plane 5 in 13, by a force of 10 lbs. acting up the plane ?

(ii) What mass would the same force support on the plane if it acted horizontally ?

2. A body is kept at rest on an inclined plane, by a force acting up the plane and equal to $\frac{\sqrt{3}}{2}$ times its weight. What is the inclination of the plane ?

3. (i) What force acting horizontally on a plane of height 3 ft. and base 4 ft. would keep a mass of 20 lbs. at rest on the plane ?

(ii) What force again, acting up the plane, would support the same mass upon the same plane ?

4. What weight would be supported by a force of 8 lbs. acting (i) up a smooth plane, (i) acting horizontally, inclined at 30° to the horizon ?

5. If a force of $12\sqrt{3}$ lbs. acting at 60° to the horizon supports a weight on a smooth plane inclined at 30° to the horizon, find the weight.

6. A force of p lbs. acting at an angle with the length of an inclined plane supports a mass of p lbs. If the plane is inclined at 45° to the horizon, find the direction of the force.

7. A mass of 30 lbs. is supported on a smooth inclined plane by the tension of a rope tied to it. The inclination of the plane is 30° to the horizon and that of the rope is 15° to the vertical. Find the tension of the rope.

8. A force acting at 30° to the length of a smooth inclined plane, supports on it, a weight $\sqrt{3}$ times its magnitude, find the inclination of the plane to the horizon.

9. A force of 2 lbs. acting up a smooth inclined plane inclined at 30° to the horizon, together with another force of $2\sqrt{2}$ lbs. acting at an angle of 45° to the plane supports a weight on the plane. Find the weight.

10. A weight of 80 lbs. is pulled 100 ft. up a smooth plane 3 in 5. What is the magnitude of the pull and to what height is the weight raised ?

11. If an effort of 75 lbs. can raise a load of 300 lbs. half a mile up a smooth inclined plane, what is the inclination of the plane and to what height is the load raised ?

12. A force of 9 lbs. acting parallel and up a smooth inclined plane, together with a force of $12\sqrt{3}$ lbs. acting at an angle of 30° with the plane, drags a weight to a point 120 ft. up the plane and 40 ft. above the ground. What is the magnitude of the weight ?

13. The sides of a wedge are as 1 : 6 : 6. If an effort of 16 lbs. drives it into a piece of wood, find the reaction at each edge of the wedge.

14. The base of a wedge isosceles in shape is 4 inches. If the reaction at each edge is 72 lbs. when it is driven with a force of 24 lbs. vertically into a piece of wood, find the length of the equal sides.

15. When an effort of 30 lbs. drives a wedge into a body the reaction on each edge is 140 lbs. If the wedge is isosceles in shape, find the vertical angle of the wedge (in terms of sine).

16. The pitch of a screw is $1\frac{1}{7}$ inches. What force must be applied at the end of its arm $1\frac{1}{2}$ ft. long to raise 198 lbs. ?

17. What is the length of the power-arm of a screw which has 3-threads to the inch, if a force of 2 lbs. applied to the end of that power-arm can raise a load of 132 lbs. ?

18. A force of $1\frac{3}{4}$ lbs. applied to the end of the power-arm, 4 inches long, of a screw can raise a load of 132 lbs. What is the pitch of the screw ?

19. The arm of a screw-jack which has 4-threads to the inch, is 2 ft. long. What mass can be lifted by a force $3\frac{1}{2}$ lbs. applied to the end of the arm ?

20. A screw makes 21 complete turns in 1 foot of its length. If a force of $1\frac{1}{2}$ lbs. applied to the end of its power-arm can raise 66 lbs., find the length of its arm.

21. The pitch and the arm of a screw-jack are respectively $\frac{1}{8}$ and $4\frac{1}{8}$ inches. What is V.R. of the machine ? If an effort of 10 lbs. applied to the machine can raise a load of 440 lbs., what is its efficiency ?

22. The volocity ratio of a screw-jack is 40 and its efficiency for a load of 1,000 lbs. is 25 per cent. What effort is needed to lift this load and how much work in foot-pound is done against friction in lifting the load through 6 in. ?

[Oxford & Cambridge]

23. A motor-jacking apparatus is such that an effort of 25 lb.-wt. will just raise a load of 1,500 lb.-wt. If the efficiency is 40 per cent, what is the velocity ratio ?

How much work in foot-pound-weight would be done by the effort in raising this load 15 in. ? [London University]

24. The efficiency of a screw-jack is 50% ; an effort of $7\frac{1}{2}$ lbs. applied to the machine can lift a load of 1125 lbs. What is its V.R. ?

25. The velocity ratio of a screw-jack is 80. An effort of 3 lb.-wt. is needed to lift a load of 60 lb.-wt. What is the efficiency of the jack with this load ?

The effort P and the load W are known to be connected by an equation $P = aW + b$, where a and b are constants. If an effort of 5 lb.-wt. is needed to lift a load of 120 lb.-wt., find a and b. [Oxford & Cambridge]

(গ) কপিকল (Pulley)

১২৯। কপিকল : আপন কেন্দ্রগামী একটি অক্ষের উপর অবাধে ঘূর্ণনক্ষম খাঁজকাটা-পরিধিযুক্ত বৃত্তাকার ধাতু বা কাষ্ঠফলকের নাম কপিকল। কপিকলের পরিধিস্থ এই খাঁজের মধ্যে দড়ি পরাইয়া দিলে ঐ দড়ি দুইপাশে হড়কাইয়া যাইতে পারে না। কপিকলের অক্ষের দুই প্রান্ত উল্লম্বভাবে স্থাপিত একটি কাঠামোর সহিত দৃঢ়ভাবে যুক্ত থাকে।

কপিকলের সহিত ঝুলানো ভারের তুলনায় উহার নিজস্ব ভার নিতান্ত অল্প হইলে সেই ভারকে অগ্রাহ্য করা হয় এবং কপিকলটিকে তখন ভারহীন বলিয়া গণ্য করা হয়। দ্বিতীয়ত, কপিকল মাত্রই মসৃণ, এত মসৃণ যে তাহাতে ঘর্ষণ নাই—এইরূপ ধরা হয়।

১৩০। একটিমাত্র কপিকলের বিভিন্ন বিন্যাস :

(১) উপরিস্থ কোন ধারকের সহিত দৃঢ়সংলগ্ন একটি কপিকলের উপর দিয়া গলানো একটি প্রসারণ-ক্ষমতাহীন, মসৃণ ও দৃঢ় রজ্জুর একপ্রান্তে একটি ভার W ও অপরপ্রান্তে P বল দুইভাবে সক্রিয় হইতে পারে : (i) রজ্জুর অংশ দুইটি

উল্লম্বদিকে সমান্তরাল বা (ii) একটি কোণে, ধর 2α কোণে তাহারা পরস্পরের সহিত নত হইতে পারে।



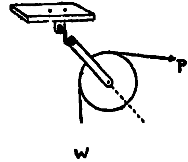
১৪১নং চিত্র

(i) প্রথম ক্ষেত্রে, স্পষ্টতই $W = P$.

সুতরাং, **যান্ত্রিক সুবিধা** $= \frac{W}{P} = 1$; এবং

কপিকলের উপর **মোট চাপ** $= W + P$

$= 2W$.



১৪১(ক) নং চিত্র

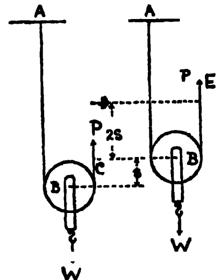
(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, ভার এবং চেষ্টা সমান অর্থাৎ $W = P$, কাজেই যান্ত্রিক সুবিধা $= 1$. কিন্তু এক্ষেত্রে চাপ $2W$ নয়। কারণ, রজ্জুর দুই অংশের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক বরাবর বিশ্লেষিতাংশ লইলে,

মোট চাপ $= P$ কস $\alpha + W$ কস α

$= (P + W)$ কস $\alpha =$ **2W কস α.**

(২) আবার ভার W যদি কপিকলটির সহিত যুক্ত হয় এবং কপিকলের উপর দিয়া গলানো দড়িটির একপ্রান্ত উপরিস্থ একটি বিন্দুতে আটকাইয়া যদি অপরপ্রান্তে বল প্রয়োগ করা হয়, তবে যান্ত্রিক সুবিধা আরও বেশী হয়।

উদাহরণস্বরূপ, কপিকলের উপর দিয়া গলানো একগাছা দড়ির একপ্রান্ত যেন উপরদিকে A বিন্দুতে বদ্ধ এবং অপরপ্রান্ত C বিন্দুতে প্রযুক্ত P বল যেন কপিকলের কেন্দ্র B বিন্দুতে ঝুলানো W ভারকে ধারণ করিয়াছে। এখন P বলের টানে কপিকলের কেন্দ্র তথা ভারটি যদি S পরিমাণ উপরে উঠে, তবে কপিকলের উভয় পাশের দড়িখানা S পরিমাণ খাটো হয়। ফলে দড়ির দুই অংশে মোট 2S পরিমাণ খাটো হয়। কাজেই, দড়ির C প্রান্ত অর্থাৎ P বলের প্রয়োগ-বিন্দু 2S পরিমাণ উপরে উঠিয়া E অবস্থান গ্রহণ করে। অতএব, কার্যতত্ত্ব অনুসারে,



১৪২নং চিত্র

$$P.2S = W.S,$$

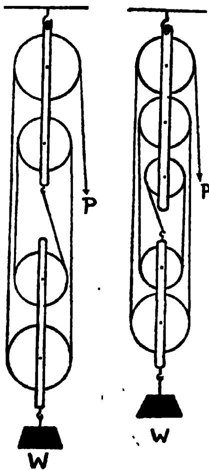
অথবা, $\frac{W}{P}=\frac{2S}{S}=2$;

এইভাবে এখানে **যান্ত্রিক সুবিধা** = 2.

(১) ও (২) উদাহরণের দুইপ্রকার কপিকল-বিন্যাসের বিচারকে ভিত্তি করিয়া এইবার আমরা একাধিক কপিকলের বিন্যাস আলোচনা করিব।

১৩১। একরজ্জু-কপিকল-বিন্যাস (Single string system of pulleys) : এই পদ্ধতিতে কতকগুলি কপিকলের উপর দিয়া একটিমাত্র রজ্জু জড়ানো থাকে। এইজন্য এই পদ্ধতিকে একরজ্জু-বিন্যাস বলা হয়। কপিকলের একরজ্জু-বিন্যাস **দ্বিতীয় পদ্ধতির কপিকল-বিন্যাস** নামেও অভিহিত হয়।

এইরূপ বিন্যাসে কপিকলগুলি দুইটি থোকায় সাজানো থাকে। প্রত্যেকটি থোকায় আবার প্রত্যেকটি কপিকলের অক্ষদণ্ডটির দুই প্রান্ত একটি কাঠামোর মধ্যে দৃঢ়ভাবে আটকাইয়া রাখা হয়। কপিকলের মোট সংখ্যা যদি যুগ্ম (বা জোড়) হয়, তবে প্রত্যেক থোকায় সমান-সংখ্যক কপিকল থাকে। আর যদি কপিকলের মোট সংখ্যা অযুগ্ম (বা বিজোড়) হয়, তবে উপরের থোকায় নিচের থোকা হইতে একটি বেশী কপিকল থাকে। দুই থোকায় সমান-সংখ্যক কপিকল থাকিলে রজ্জুখানির একপ্রান্ত উপরের কাঠামোর নিচে, কিন্তু দুই থোকায় কপিকল-সংখ্যা অসমান হইলে রজ্জুখানির একপ্রান্ত নিচের থোকার কাঠামোটির উপরে যুক্ত হয়। তারপর উপরের থোকার একটির পর নিচের থোকার একটি অথবা নিচের থোকার একটির পর উপরের থোকার একটি এইভাবে কপিকলগুলি জড়াইয়া জড়াইয়া রজ্জুখানির অপরপ্রান্ত সর্বোচ্চ কপিকলটি ঘুরিয়া নিচদিকে ঝুলিতে থাকে। এই মুক্তপ্রান্তে বল প্রযুক্ত হয়। নিচের থোকার কাঠামোর সহিত সবার নিচে ভারটি যুক্ত থাকে এবং উপরের থোকার কাঠামোটি যুক্ত থাকে, ঘরের ছাদের মতো কোন-একটি স্থির অবলম্বনের সহিত। ইহাই **দ্বিতীয় পদ্ধতির কপিকল-বিন্যাস।**



১৪৩নং চিত্র ১৪৩(ক)নং চিত্র

দ্বিতীয় পদ্ধতির কপিকল-বিন্যাসে যান্ত্রিক সুবিধা : এই বিন্যাসে কপিকলেব মোট-সংখ্যা যদি n হয, তবে স্পষ্টতই উল্লম্ববেখায় n-সংখ্যক দড়ির অংশ ঝুলিযা থাকিবে। কাজেই, ভাবটি যদি s পরিমাণ উপবে উঠে, তবে ঐরূপ প্রত্যেকটি দড়িব অংশও s পরিমাণ খাটো হইযা যাইবে। এইভাবে মোট ns পরিমাণ দড়ি উপবে উঠায দড়িখানিব মুক্তপ্রান্ত বা বলেব প্রয়োগ-বিন্দু নিচদিকে ঠিক ns পবিমাণই নামিযা যাইবে। অতএব, ভার W এবং বল P হইলে কার্যতত্ত্ব অনুসারে—

$$P\,ns = W\,s \text{ হইবে।}$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{ns}{s} = n.$$

$\therefore$ **যান্ত্রিক সুবিধা = কপিকলের মোট-সংখ্যা।**

বলা বাহুল্য উপবে বর্ণিত ক্ষেত্রে কপিকলেব ভাব ও ঘর্ষণ অগ্রাহ্য কবা হইযাছে। কপিকলগুলির মধ্যে উপবেব থোকাটির ওজন কখনই ধর্তব্য নয়, কাবণ উহা উপবেব অবলম্বনটিব আশ্রিত। কাজেই, একমাত্র নিচেব থোকার কপিকলগুলি ওজন হিসাবে গ্রহণ করিলেও কবা যায়, যদি কবা যায় এবং যদি সেই নিচেব থোকাব ওজন হয় w, তবে বল ও ভারের সম্পর্ক হয় নিম্নরূপ :

$$P\,ns = (W + w)s, \quad \text{অথবা,} \quad \mathbf{nP = W + w.}$$

** উপরে বর্ণিত দ্বিতীয় পদ্ধতির কপিকল-বিন্যাসে দুইটি থোকা দুইটি কাঠামোয় ধৃত। কিন্তু আজকাল সাধারণত প্রত্যেক থোকাব কপিকলগুলিকে একই অক্ষদণ্ডের উপব পাশাপাশি সাজানো হইয়া থাকে। ১৪৪নং চিত্রটিতে এই বিন্যাস দেখানো হইয়াছে।


১৪৪নং চিত্র

১৩২। বিষম-কপি বা বিভেদক কপিকল (Differential Pulley) :

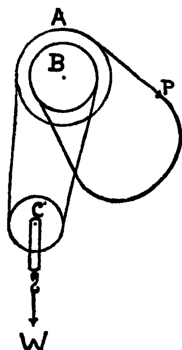
বিভেদক কপিকল একরজ্জু-বিন্যাসের উন্নততর সংস্থান। দ্বিতীয় পদ্ধতির বিন্যাসেব মতো ইহাতেও দুইটি থোকায় কপিকল বিন্যস্ত। উপরেব থোকায় থাকে বিভিন্ন ব্যাসার্ধ-

যুক্ত এককেন্দ্রিক একজোড়া কপিকল। ইহারা একই ধাতুখণ্ড হইতে কাটিয়া কুঁদিয়া গড়া বলিয়া একেবারে গায়ে গায়ে সাঁটা এবং সেইজন্য তাহারা একসঙ্গেই ঘুরিয়া থাকে। নিচের থোকায় একটিমাত্র কপিকল। কপিকলগুলির কোনটিতেই খাঁজ নাই। তাহার পরিবর্তে প্রত্যেকটির পরিধিতে দাঁতকাটা থাকে। দুই থোকায় এই তিনটি কপিকল বেষ্টন করিয়া সাইকেলের শিকলের মতো দাঁত-ওয়ালা একটি শিকল জড়ানো থাকে। সাইকেলের শিকলের মতোই আবার ইহার দুই প্রান্ত থাকে জোড়া। শিকলখানির উপরের থোকার বড় কপিকলটি হইতে আরম্ভ করিয়া নিচের থোকার কপিকলটি ঘুরিয়া আবার উপরের থোকার ছোটটিকে ঘুরিয়া আসে। এইভাবে উপরের থোকারই দুইটি কপিকল হইতে শিকলখানির দুইটি অংশ বাহিরে আল্‌গা হইয়া ঝুলিতে থাকে। উহার উপরের অংশটিতে বল প্রয়োগ করা হয়। নিচের থোকা হইতে ভারটি ঝুলানো থাকে।

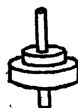
এখন উপরের থোকার কপিকল দুইটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a ও b $(a > b)$ এবং প্রযুক্ত বল P ও ভার W হইলে,

$$\text{P-বলের দ্বারা কৃত কার্য} = P.2\pi a.$$

দ্বিতীয়ত, উপরের থোকার কপিকল দুইটি একপাক ঘুরিয়া আসিলে বড়টির দিকে $2\pi a$ এবং ছোটটির দিকে $2\pi b$ পরিমাণ শিকল বাহির হইয়া আসে। কিন্তু বড়টি হইতে বাহির হইয়া শিকলখানি যেমন বলের প্রয়োগ-বিন্দুকে নিচে নামায় তেমনি ছোটটি হইতে বাহির হইয়া শিকলখানি ভারটিকে নিচে নামাইয়া দেয়। ফলে প্রথম ক্ষেত্রে শিকলখানি $2\pi a$ পরিমাণ খাটো হয়, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উহা $2\pi b$ পরিমাণ লম্বা হয়। সুতরাং, মোটমাট উহা $2\pi a - 2\pi b$ বা $2\pi(a-b)$ পরিমাণ খাটো হয়। শিকলের দুই অংশের প্রত্যেকটি তাহা হইলে $\frac{1}{2} \times 2\pi(a-b)$ বা $\pi(a-b)$ পরিমাণ খাটো হয়।



১৪৪ (ক)নং চিত্র


১৪৪(খ)নং চিত্র

অতএব, ভারটিও ঐ $\pi(a-b)$ পরিমাণ উপরে উঠে।

সুতরাং, ভারের উপর কৃত কার্য $= W.\pi(a-b)$

কার্যতত্ত্ব অনুসারে

$\therefore$ P বলের দ্বারা কৃত কার্য = ভারের উপর কৃতকার্য ;

$\therefore$ $P.2\pi a = W\pi(a-b)$.

$\therefore$ **যান্ত্রিক সুবিধা** $= \frac{W}{P} = \frac{2\pi a}{\pi(a-b)} = \frac{2a}{a-b}$.

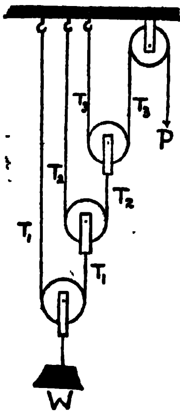
স্পষ্টতই $a-b$ যতই ছোট হইবে ততই যান্ত্রিক সুবিধা বেশী হইবে। অর্থাৎ উপরের থোকায় বিভেদক কপিকল দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তর যত কম হইবে ততই বিভেদক কপিকলের যান্ত্রিক সুবিধা বৃদ্ধি পাইবে। বিভেদক কপিকলের একটি বিশেষ সুবিধা এই যে, বলপ্রয়োগকালে যখন খুশি টান ছাড়িয়া দিলেও ভারটি নিচে নামে না, কারণ তখন শিকলখানি কপিকলের দাঁতে দাঁতে কামড়াইয়া আটকাইয়া থাকে।

* ১৩৩। **ভিন্নরজ্জু-কপিকল-বিন্যাস (Separate String systems of Pulleys) :** ভিন্নরজ্জু কপিকল-বিন্যাসের দুইটি পদ্ধতি আছে। প্রথমটিকে **কপিকল-বিন্যাসের প্রথম পদ্ধতি** বলে, দ্বিতীয়টিকে বলে **ভিন্নরজ্জু-কপিকলের** উল্টা বিন্যাস বা **কপিকল-বিন্যাসের তৃতীয় পদ্ধতি।**

(a) প্রথম পদ্ধতির কপিকল-বিন্যাস (First system of Pulleys) : এই পদ্ধতিতে প্রত্যেকটি কপিকলকে এক-একগাছা আলাদা দড়ি দ্বারা ধারণ করা হয়। এইরূপ এক-একগাছা দড়ির একমাথা উপরে একটি ধারকের সঙ্গে যুক্ত থাকে, আর-একমাথা একটি কপিকলকে ঘুরিয়া আসিয়া উহার ঠিক অব্যবহিত উপরকার কপিকলটির অক্ষদণ্ডের সহিত যুক্ত হয়। সবার উপরের কপিকলটি উপরকার ধারকটির সহিত যুক্ত থাকে। ইহার ঠিক নিচেকার কপি-টি হইতে দড়িগাছা আসিয়া কিন্তু উহারই তলায় যুক্ত হয় না। এইক্ষেত্রে সেই দড়িগাছা (সর্বোচ্চ) কপি-টির উপর দিয়া ঘুরিয়া আসিয়া নিচদিকে ঝুলিতে থাকে এবং ইহার মাথা ধরিয়াই বল প্রয়োগ করিতে হয়। ভারটি ঝুলানো থাকে সবার নিচেকার কপিকলটির অক্ষদণ্ডের সহিত।

যান্ত্রিক সুবিধা : এই পদ্ধতিতে P বলে যেন W ভার উঠানো হয়। এখন

সবচেয়ে নিচেকার কপিকলটির উপর দিয়া গলানো দড়িগাছার প্রত্যেক অংশে টান যদি T_1 হয়, তবে



১৪৫নং চিত্র

$$2T_1 = W \quad \text{বা} \quad T_1 = \tfrac{1}{2}W;$$

আবার, নিচ হইতে দ্বিতীয় কপিকলটির উপর দিয়া গলানো দড়িগাছার প্রত্যেক অংশে টান যদি T_2 হয়, তবে $2T_2 = T_1 = \frac{1}{2}W.$

$$\therefore \quad T_2 = \frac{1}{2^2}W.$$

অনুরূপে নিচ হইতে তৃতীয় কপিকলটির উপর দিয়া গলানো দড়িগাছার প্রতেক অংশে টান T_3 হইলে,

$$2T_3 - T_2 = \frac{1}{2^2}W.$$

$$\therefore \quad T_3 = \frac{1}{2^3}W.$$

এইভাবে কপিকলের মোট-সংখ্যা n হইলে, n-তম কপিকলের উপর দিয়া গলানো দড়িগাছার প্রত্যেক অংশেই P পরিমাণ টান।

$$\therefore \quad 2P = \frac{1}{2^{n-1}}W,$$

$$\text{বা}, \quad P = \frac{1}{2^n}W.$$

$$\therefore \quad \textbf{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = 2^n.$$

(b) তৃতীয় পদ্ধতির কপিকল-বিন্যাস (Third system of Pulleys): এই পদ্ধতিতে সবার উপরকার কপিকল উপরিস্থ একটা থাম বা ঐ ধরনের একটি ধারকের সহিত দৃঢ়বদ্ধ থাকে। সবার নিচে থাকে একটি দণ্ডের সহিত ঝুলানো ভার। সর্বোচ্চ কপিকলটির উপর দিয়া গলানো দড়িগাছার একমাথা নিচেকার ভারধারী দণ্ডটির সহিত যুক্ত থাকে, আরেক-মাথা ঐ কপিকলের ঠিক অব্যবহিত নিচেকার কপিকলটির অক্ষদণ্ডের সহিত যুক্ত হয়। উপর হইতে দ্বিতীয় কপিকলের উপর দিয়া গলানো দড়িগাছিরও তেমনি একমাথা নিচের দণ্ডটির সহিত এবং

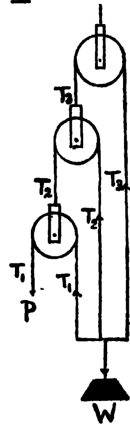
আরেক-মাথা তৃতীয় কপিকলটির অক্ষদণ্ডের সহিত যুক্ত হয়। এইভাবে এক-একগাছা দড়ির সাহায্যে একই পদ্ধতিতে পর পর কপিকলগুলি সাজানো থাকে। সর্বনিম্ন কপিকলটির উপর দিয়া গলানো দড়িখানির একমাথা নিচের দণ্ডটির সহিত যুক্ত থাকে এবং আরেক-মাথায় বল প্রয়োগ করা হয়। কপিকলের এই বিন্যাসকেই বলে **তৃতীয় পদ্ধতির কপিকল-বিন্যাস।**

যান্ত্রিক সুবিধা ঃ এই পদ্ধতিতে প্রযুক্ত বল P এবং ভার যেন W. নিচ হইতে ১ম, ২য়, ৩য়, n-তম প্রভৃতি কপিকলগুলির দড়িতে টান যথাক্রমে যেন, $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$.

তাহা হইলে, $T_1 = P$

$$T_2 = 2T_1 = 2P$$
$$T_3 = 2T_2 = 2^2P$$
$$T_4 = 2T_3 = 2^3P$$

$$T_n = 2^{n-1}p.$$



১৪৬নং চিত্র

আবার, ভার $W = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n$

$$= P + 2P + 2^2P + 2^3P + \cdots + 2^{n-1}P$$
$$= P(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1})$$
$$= P.(2^n - 1).$$

$\therefore$ **যান্ত্রিক সুবিধা** $= \dfrac{W}{P} = 2^n - 1.$

উদাহরণমালা

[উচ্চতর মাধ্যমিক পরীক্ষার পাঠক্রম অনুসারে আমরা কেবল দ্বিতীয় পদ্ধতির কপি-বিন্যাস ও বিষম-কপি-সংক্রান্ত প্রশ্নাবলীর উদাহরণ দেখাইব।]

(ক) একরজ্জু-কপিকল-বিন্যাস ঃ

আগেই বলা হইয়াছে যে, এই পদ্ধতিতে, (১) কপিকল-সংখ্যা জোড় হইলে দুই থোকায় সমান-সংখ্যক কপিকল থাকে এবং দড়িখানি উপরের থোকার তলায়

যুক্ত হয়। (২) আর কপিকল-সংখ্যা যদি বিজোড় হয়, তবে উপরের থোকায় নিচের থোকার চেয়ে একটি বেশী কপিকল থাকে এবং দড়িখানি নিচের থোকার উপরে যুক্ত হয়।

কাজেই কপির সংখ্যা n হইলে, **n জোড় বা বিজোড় যাহাই হউক না, নিচের থোকা দাড়ির n-সংখ্যক সমান্তরাল অংশদ্বারা ধৃত হয়।**

দ্বিতীয়ত, আমরা জানি,

$$\text{বেগানুপাত} = \frac{\text{চেষ্টা দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{বাধা দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব}}।$$

সুতরাং, বাধা বা ভার যদি এক একক দূরত্ব উপরে উঠে, তবে n-সংখ্যক দড়ির অংশের প্রত্যেকটি এক একক খাটো হইবে অর্থাৎ মোট n একক দড়ি উহার মুক্তপ্রান্তের দিকে ঝুলিয়া পড়িবে। কাজেই

$$\text{বেগানুপাত} = \frac{n}{1} \text{ বা } n \text{ হইবে।}$$

স্পষ্টতই, **বেগানুপাত এখানে কপির সংখ্যার সমান।** উহার সহিত কপিগুলির ঘর্ষণাদির কোন সম্পর্ক নাই।

(১) In a second system of pulleys a weight of 11 lbs. just supports a weight of 47 lbs. while a weight of 10 lbs. just supports a weight of 42 lbs. (i) Find the number of pulleys and the weight of the lower block. (ii) What effort applied to this system will support 52 lbs. ?

নিচের থোকার ওজন w পাউণ্ড এবং কপির সংখ্যা n হইলে,

$$47 + w = 11n$$

$$\text{এবং} \quad 42 + w = 10n$$

$$\therefore \quad 5 = n$$

অর্থাৎ কপির সংখ্যা 5.

আবার $47 + w = 11 \times 5.$

$\therefore \quad w = 55 - 47$ বা 8 পাউণ্ড।

আবার তৃতীয় ক্ষেত্রে নির্ণেয় বল যদি P হয়, তবে

$52 + 8 = 5P$, অথবা, $P = \frac{60}{5}$ বা 12 পাউণ্ড।

(২) There are 4 pulleys in the lower block of a second system of pulleys. The string is attached to the lower block. If the efficiency of the system is $66\frac{2}{3}\%$, what weight can it raise by an effort of 12 lbs. ?

এখানে দড়িখানি যখন নিচের থোকার সহিত যুক্ত, তখন মোট কপিসংখ্যা বিজোড়। সুতরাং উপরের থোকায় 4+1 বা 5টি কপি (কারণ বিজোড়-সংখ্যক কপি হইলে উপরের থোকায় নিচের থোকার চেয়ে একটি বেশী কপি থাকে)। মোট কপিসংখ্যা $=4+5=9$.

$\therefore$ বেগানুপাত $=9$.

এইবার নির্ণেয় ওজন যদি W পাউণ্ড হয়, তবে

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{12} = \text{বেগানুপাত} \times \text{দক্ষতা},$$

$$\text{বা,}\quad W = 12 \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \frac{2\cancel{0}\cancel{0}}{\cancel{3}\times}$$

বা, 72 পাউণ্ড।

(৩) A man weighing 10 stones can raise a maximum weight of 50 stones by pulling the free end of the string of a second system of pulleys, whose lower block weighs 10 lbs. (i) How many pulleys must the system have ? (ii) What will be the thrust on the ground and the stress on the upper block when he pulls the maximum weight ?

(i) লোকটির যদি নিজের সমগ্র ওজন প্রয়োগ করিয়া 50 স্টোন উঠাইতে হয় এবং কপির সংখ্যা যদি n হয়, তবে

$$50 + \frac{10}{14} = 10n,$$

$$\text{বা,}\quad \frac{710}{14} = 10n,$$

$$\text{বা,}\quad n = \frac{71}{14} \text{ বা } 5\frac{1}{14}.$$

কিন্তু n বা কপির সংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না। কাজেই আলোচ্য ক্ষেত্রে অন্তত 6টি কপি থাকা চাই।

(ii) 6টি কপি থাকিলে লোকটির সমগ্র ওজন পরিমাণ বল প্রয়োগ করার

প্রয়োজন নাই। ধরা যাক, সেক্ষেত্রে P স্টোন বল প্রয়োগ করিলে সর্বাধিক 50 স্টোন উঠানো যায়। তাহা হইলে,

$$6P = 50 + \frac{10}{14} = \frac{710}{14}.$$

$$\therefore \quad P = \frac{710}{14 \times 6} \text{ বা } 8\frac{19}{42} \text{ স্টোন।}$$

আবার, মাটির উপর চাপ = লোকটির সমগ্র ওজন − উপরদিকে দড়ির টান

$$= 10 - 8\frac{19}{42} \text{ বা } 1\frac{23}{42} \text{ স্টোন।}$$

তৃতীয়ত, উপর থোকায় চাপ = ভার + নিচদিকে লোকটির টান

$$= 50 + 8\frac{19}{42} \text{ বা } 58\frac{19}{42} \text{ স্টোন।}$$

(খ) বিষম-কপি : বড় কপিটির ব্যাসার্ধ a এবং ছোট কপিটির ব্যাসার্ধ b হইলে, আমরা জানি

$$\textbf{যান্ত্রিক সুবিধা, } \frac{W}{P} = \frac{2a}{a - b} = \text{বেগানুপাত}$$

(৪) The radii of the wheels of a differential pulley are 5 inches and $4\frac{1}{2}$ inches. If the efficiency of the machine is 80%, find, (i) the velocity ratio and (ii) the mechanical advantage of the machine. (iii) What weight can the machine raise by an effort of 8 lbs.?

(i) $\text{বেগানুপাত} = \frac{2a}{a - b} = \frac{2 \times 5}{5 - 4\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20.$

(ii) যান্ত্রিক সুবিধা = বেগানুপাত × দক্ষতা

$$= \overset{}{20} \times \frac{\overset{16}{80}}{100} \text{ বা } 16.$$

(iii) যান্ত্রিক সুবিধা = 16 বলিয়া নির্ণেয় ভার যদি W পাউণ্ড হয়, তবে

$$\frac{W}{8} = 16.$$

$$\therefore \quad W = 128 \text{ পাউণ্ড।}$$

(৫) If in the above machine the weight is raised through a height of 1 foot 10 inches, through what length must the power be exerted ?

প্রত্যেক পাকে ভারটি $\pi(5-4\frac{1}{2})$ বা $\frac{22}{7}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{7}$ ইঞ্চি উপরে উঠে। K-সংখ্যক পাকে যেন উহা 1 ফুট 10 ইঞ্চি বা 22 ইঞ্চি উপরে উঠে। তাহা হইলে,

$$K.\frac{11}{7}=22, \text{ বা, } K=22\times\frac{7}{11} \text{ বা } 14.$$

কিন্তু প্রত্যেক পাকে চেষ্টা $2\pi a$ বা $\frac{2\times22\times5}{7}$ ইঞ্চি সরিয়া যায়।

সুতরাং, 14 পাকে চেষ্টা মোট $14\times\frac{2\times22\times5}{7}$ বা 440 ইঞ্চি বা 36 ফুট 8 ইঞ্চি সরে।

অনুশীলনী ২৩

1. A weight of 6 lbs. just supports a weight of 28 lbs. and a weight of 8 lbs. just supports a weight of 42 lbs. Find the number of strings and the weight of the lower block. [B. H. U. 1642]

2. In a frictionless system of pulleys, in which a single rope is used, an effort of 30 lb.-wt. just supports a load of 70 lb.-wt. and an effort of 90 lb.-wt. just supports a load of 310 lb.-wt. Calculate (a) the weight of the lower block, (b) the velocity ratio, (c) the effort required to support a load of 110 lb.-wt. [London University]

3. In a system of pulleys there are 9 parallel portions of the same string holding the lower block. (a) How many pulleys are there in each block ? (b) If the system can raise 70 lb.-wt. by an effort of 10 lb.-wt. and 115 lb.-wt. by an effort of 15 lb.-wt., what is the weight of its lower block ?

4. A pulley system consists of two blocks each containing two pulleys ; the upper block is fixed and the lower movable, and the same string passes round each pulley. Draw a diagram and state the velocity ratio. If the efficiency of the system is

80 per cent., what is the maximum load which can be raised by the application of an effort of 20 lb.-wt. ?

[London University]

5. In a second system of pulleys, there are 3 pulleys in the lower block. The weight of the lower block is 10 lb.-wt. and the string is fastened to it. Find the weight that the system can lift by an effort of 15 lbs.

6. The weight of the lower block of a single-string system of pulleys is 15 lb.-wt. Find the least number of pulleys that the system must have in order that an effort not exceeding 24 lb.-wt. may raise a load of 125 lb.-wt.

7. In the second system of pulleys, if weights of 4 and 5 lbs. support respectively weights of 14 and 20 lbs., find the number of pulleys and the weight of the lower block.

[H. S. B. S. E. 1962]

8. In a second system of pulleys, find the weight of the lower block, if an effort of 6 lbs.-wt can support a weight of 32 lbs. and if the number of pulleys is 7.

[H. S. B. S. E. 1960]

9. Using a laboratory model of a pulley system in which the pulleys are arranged in two blocks, it is observed that a 100 g. weight can just be raised by an effort of 30 g.-wt. and a 500 g -wt. by an effort of 105 g.-wt. If the velocity ratio of the system is 6, find the efficiency for each load. Assuming that the difference in efficiency is due solely to the weight of the lower block, determine this weight. [London University]

10. In a second system of pulleys it is found that a weight of w lbs. supports a weight of W lbs. and a weight of w' lbs. supports a weight of W′ lbs. Find the number of pulleys in the system and also the weight of the lower block. [C. U. 1953]

11. A man whose weight is 154 lbs. raises a body of 3 cwt. by means of a system of pulleys in which the same rope passes round all the pulleys, there being four in each block and the rope being attached to the upper block. Neglecting the weights of pulleys find what will be his thrust on the ground if he pulls vertically downwards. [C. U. 1942]

12. A man whose weight is 200 lbs. raises a body weighing 600 lbs. by means of a system of pulleys in which the same rope passes round all the pulleys, there being 4 pulleys, in each block, and the rope being attached to the upper block. Neglect-

ing the weights of the pulleys, find what will be his thrust on the ground if he is pulling vertically downwards.

[U. P. B. 1956]

13. A man weighing 10 stones raises a load of 6 cwt. by means of a single string system of light pulleys, there being 6 pulleys in each block. Find the thrust of the man on the ground, and the stress on the supporting beam.

[U. P. B. 1936, '40]

14. A man weighing 9 stones stands on a platform attached to the lower block of the second system of pulleys and supports himself by pulling the free end of the string. If there be 8 pulleys in all, what force must he exert ? [B. H. U. 1949]

15. In the second system of pulleys in which the weight of the lower block is 20 lbs. there are 5 pulleys in all. A man weighing 10 stones is suspended from the lower block and supports himself by pulling at the free end of the string. Find the tension of the string, assuming the supporting portions of the string to be vertical. [B. H. U. 1952]

16. A man weighing 10 stones raises a weight of 14 stones by means of a continuous rope system of pulleys in which there are three pulleys in each block, one end of the rope being attached to the fixed block. The efficiency of the system is 0·6. What thrust will the man exert on the ground when he pulls vertically downward ? Draw a diagram to show the arrangement of the pulleys. [London University]

17. The diameters of the wheels of a differential pulley are 4 inches and $3\frac{1}{2}$ inches. What effort is required to lift a load of 64 lbs. by this machine ?

18. A weight is raised to a height of $1\frac{1}{2}$ ft. by a differential pulley. The radii of its wheels are 5 inches and $4\frac{1}{2}$ inches. Through what distance does the power work ?

19. The velocity ratio of a differential pulley is 8. If the diameter of its bigger wheel is 8 inches, what is the radius of the smaller wheel ?

20. If the efficiency of the machine described in Ex. 19 is 60%, what weight can be raised by an effort of 15 lbs. applied to this machine ?

21. The mechanical advantage of a differential pulley is 9. If its efficiency is 75%, what is its velocity ratio ?

22. What weight can be raised by the machine described in Ex. 21, if the effort is 10 lbs. ?

সপ্তদশ পরিচ্ছেদ

প্রাস (Projectile)

১৩৪। **প্রাস ঃ** শূন্যদেশে যে-কোনদিকে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকে **প্রাস** বলা হয়। প্রাসের গতিপথকে ইংরাজীতে trajectory বলে। বাংলায় ইহাকে প্রাস-পথ বলা চলে।

প্রাস-পথ সরল নহে, বক্র। এ-পর্যন্ত আমরা অভিকর্ষাধীন বস্তুর সরল-রেখায় গতি-ই বিচার করিয়াছি। আকাশে উৎক্ষিপ্ত বা আকাশ হইতে নিক্ষিপ্ত বস্তুর উল্লম্বদিকে গতি-প্রকৃতি আমরা জানি। নততলের উপর দিয়া উৎক্ষিপ্ত অথবা নিচদিকে পতনশীল বস্তুর গতিও আমরা আলোচনা করিয়াছি। এই সকলই সরলরেখায় গতির উদাহরণ। প্রাসের গতি কিন্তু এমন সরলরেখায় নয়। উহা চলে ক্রমাগত বাঁকিয়া। কাজেই উহার গতি ও গতি-পথের স্বরূপসম্বন্ধে আলোচনা এখনও বাকী। এই পরিচ্ছেদে আমরা সেই আলোচনারই অবতারণা করিব।

পূর্বসূত্র হিসাবে প্রথমে কয়েকটি সংজ্ঞা নির্দেশ করা প্রয়োজন। যে বিন্দু হইতে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহাকে **প্রক্ষেপ-বিন্দু** (Point of projection), অনুভূমিক রেখার সহিত যে কোণে উহা প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহাকে **প্রক্ষেপ-কোণ** (Angle of projection) এবং যে প্রারম্ভিক বেগ সহ উহা প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহাকে বলে **প্রক্ষেপ-বেগ** (Velocity of projection)। প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে কোন সমতলে প্রাসের পতন-বিন্দু পর্যন্ত দূরত্বকে বলে ঐ সমতলে প্রাসের **পাল্লা** (Range)।

এই প্রসঙ্গে আরেকটি কথা উল্লেখযোগ্য যে, প্রাসের গতি-বিচারে বাতাসের বাধা একেবারেই গ্রাহ্য করা হইবে না।

১৩৫। **স্তম্ভশীর্ষ হইতে অনুভূমিক রেখায় প্রক্ষেপ (Horizontal projection from a tower) ঃ** একটি উচ্চ স্তম্ভশীর্ষ (অথবা ঐরূপ যে-কোন উচ্চ স্থান) হইতে কোন বস্তুকে যদি অনুভূমিক রেখায় u বেগে

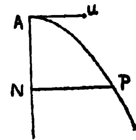
ছুঁড়িয়া দেওয়া যায, তবে বস্তুটি ঐ অনুভূমিক বেগ ও অভিকর্ষজ ত্বরণের অধীনে ধাবিত হয়। অভিকর্ষজ ত্বরণ উল্লম্বরেখায় সক্রিয় বলিয়া অনুভূমিক রেখায় উহার কোন উপাংশ থাকিতে পারে না। কাজেই বস্তুটির অনুভূমিক সরণ হইবে u-সমবেগে এবং উল্লম্বদিকে সরণ হইবে g-সমত্বরণে।

এখন t-কাল পরে বস্তুটির অনুভূমিক ও উল্লম্ব সরণ যথাক্রমে যদি x ও y হয়, তবে স্পষ্টতই,

$$x = ut \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$y = \frac{1}{2}gt^2. \quad \cdots \quad (11)$$

এখন এই দুইদিকে যুগপৎ সরণের ফলে প্রক্ষেপ-বিন্দু A হইতে সরিয়া আসিয়া যদি P অবস্থান গ্রহণ করে, তবে



১৪৭নং চিত্র

$$x = PN \text{ এবং } y = AN.$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{AN} = \frac{x^2}{y} = \frac{u^2t^2}{\frac{1}{2}gt^2} = \frac{2u^2}{g}$$

কিন্তু u ও g-র মান এখানে নির্দিষ্ট বলিয়া $\frac{2u^2}{g}$ একটি ধ্রুবক এবং সময় t-নিরপেক্ষ। সুতরাং, বস্তুটির অর্থাৎ P-এর যে-কোন অবস্থানের জন্য

$$\frac{PN^2}{AN} = \frac{2u^2}{g} = \text{ধ্রুবক।}$$

$$\frac{x^2}{y} = \text{ধ্রুবক} = k \text{ (ধর)।}$$

বা, $yk = x^2$,

বা, $y = \frac{1}{k}x^2$

$\frac{1}{k} = 4a$ ধরিলে

$$\mathbf{y = 4ax^2}.$$

ইহাই অধিবৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore$ বস্তুটির গতি-পথ একটি অধিবৃত্ত।

অতএব, **স্তম্ভশীর্ষ হইতে অনুভূমিক রেখায় প্রক্ষিপ্ত প্রাসের সঞ্চার-পথ একটি অধিবৃত্ত।**

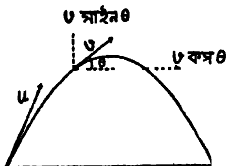
১৩৬। অনুভূমিক তলের সহিত বিশেষ কোণে প্রক্ষেপ (Projection at an angle with the horizon) : অনুভূমিক তলের সহিত বিশেষ কোণে যদি একটি প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয়, তবে প্রাসটি, ঐ প্রক্ষেপ-বেগ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ, দুইয়ের অধীনে শূন্যপথে চলিতে থাকিবে। কিন্তু অভিকর্ষজ ত্বরণ অনুভূমিক তলের সহিত লম্বরেখায় এবং ঐ প্রক্ষেপ-বেগ অনুভূমিক তলের সহিত বিশেষ কোণে সক্রিয়। কাজেই প্রক্ষেপ-বেগকে উল্লম্ব ও অনুভূমিক রেখায় বিশ্লেষণ করিয়া অভিকর্ষজ ত্বরণের সহিত সংশ্লেষ করিতে হয়।

প্রক্ষেপ-বেগ ও প্রক্ষেপ-কোণ যথাক্রমে যদি u ও α হয়, তবে উল্লম্ব ও অনুভূমিক রেখায় u-বেগের বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে u সাইন α ও u কস α। সুতরাং, প্রাসটির (a) **ঊর্ধ্বগতি-বিচারে** (i) u সাইন α প্রারম্ভিক বেগ ও (ii) $-g$ ত্বরণ ধরিতে হইবে এবং উহার (b) **অনুভূমিক গতি-বিচারে** কেবল u কস α সমবেগ ধরিতে হইবে।

১৩৬.১। অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে ও u-বেগে প্রক্ষিপ্ত প্রাসের t সময় পর বেগের মান ও দিক্ (The magnitude and direction of the velocity of a projectile thrown with a velocity u and at an angle of α with the horizon, after a time t) :

প্রক্ষেপ-মুহূর্তের t সময় পরে প্রাসটির বেগ যেন অনুভূমিক রেখার সহিত θ কোণে v হয়। তাহা হইলে t সময় পরে প্রাসটির অনুভূমিক বেগ $= v$ কস θ,

এবং উল্লম্ব-বেগ $= v$ সাইন θ।



১৪৮নং চিত্র

এখন অনুভূমিক দিকে প্রাসটির কোন ত্বরণ নাই বলিয়া ঐ দিকে উহার প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক বেগ সমান হইবে।

অর্থাৎ, v কস $\theta = u$ কস α ; … … (i)

কিন্তু উল্লম্বদিকে প্রারম্ভিক বেগ u সাইন a ও ত্বরণ $-g$ বলিয়া t সময় পরে ঐ দিকে প্রান্তিক বেগ

$$v \text{ সাইন } \theta = u \text{ সাইন } a - gt\text{ ;} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

∴ (i) ও (ii)-এব বর্গের সমষ্টি লইলে,

$$v^2 \text{ কস}^2\theta + v^2 \text{ সাইন}^2\theta = u^2 \text{ কস}^2 a + (u \text{ সাইন } a - gt)^2,$$

বা, $v^2 \, (\text{কস}^2\theta + \text{সাইন}^2\theta)$

$$= u^2 \text{ কস}^2 a + u^2 \text{ সাইন}^2 a - 2ugt \text{ সাইন } a + g^2t^2,$$

বা, $v^2 = u^2 \, (\text{কস}^2 a + \text{সাইন}^2 a) - 2ugt \text{ সাইন } a + g^2t^2.$

$$\therefore \quad \mathbf{v^2 = u^2 - 2ugt \text{ সাইন } a + g^2t^2.} \quad \cdots \quad \cdots \quad \textbf{(1)}$$

আবাব (ii)-কে (i) দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\text{ট্যান } \theta = \frac{\mathbf{u} \text{ সাইন } a - \mathbf{gt}}{\mathbf{u} \text{ কস } a} \qquad \textbf{(2)}$$

(1) হইতে t সময পবে প্রাসেব বেগেব মান এবং (2) হইতে ঐ বেগের দিক্ পাওযা যায়।

১৩৬·২। অনুভূমিক তলের সহিত a কোণে ও u বেগে প্রক্ষিপ্ত প্রাসের h উচ্চতা আরোহণের পর বেগের মান ও দিক্ (The magnitude and direction of a projectile thrown with a velocity u at an angle of a with the horizon, when it has reached a height of h):

h উচ্চতা আবোহণেব পর প্রাসটিব বেগ v এবং প্রক্ষেপ-কোণ যদি θ হয়, তবে উহাব অনুভূমিক ও উল্লম্ব বিশ্লেষিতাংশ লইলে দেখা যায যে,

$$v \text{ কস } \theta = u \text{ কস } a \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এবং $v^2 \text{ সাইন}^2\theta = u^2 \text{ সাইন}^2 a - 2gh. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

(ii) এর সহিত (i) এর বর্গ যোগ করিলে,

$$v^2 \, (\text{সাইন}^2\theta + \text{কস}^2\theta) = u^2 \, (\text{সাইন}^2 a + \text{কস}^2 a) - 2gh,$$

$$\mathbf{v^2 = u^2 - 2gh.} \quad \cdots \quad \cdots \quad \textbf{(3)}$$

আবার,

$$\text{ট্যান}\ \theta = \frac{v\ \text{সাইন}\ \theta}{v\ \text{কস}\ \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{u^2\ \text{সাইন}^2\alpha - 2gh}}{u\ \text{কস}\ \alpha}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (4)$$

(3) ও (4) যথাক্রমে নির্ণেয় বেগ v-র মান ও দিক্ সূচিত করে।

১৩৬·৩। অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে ও u বেগে প্রক্ষিপ্ত প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা ও উত্থান-কাল (The greatest height and the time of rise of a projectile thrown with a velocity u at an angle of α with the horizon) :

(i) **সর্বাধিক উচ্চতা :** সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসটির উল্লম্ব-বেগ শূন্যে পরিণত হইবে। সুতরাং, এই উচ্চতা যদি H হয়, তবে প্রাসটির প্রারম্ভিক উল্লম্ব-বেগ u সাইন α এবং ত্বরণ $-g$ বলিয়া,

$$v^2 = u^2 - 2fs \text{ সূত্র অনুসারে,}$$

$$0 = u^2\ \text{সাইন}^2\alpha - 2gH\ ;$$

অথবা, $2gH = u^2$ সাইন$^2\alpha$.

$$\therefore\ H = \frac{u^2\ \text{সাইন}^2\alpha}{2g}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (5)$$

(ii) [illegible]

আবার মোট উত্থানকাল যদি T হয়, তবে স্পষ্টতই এই T সময়েই প্রাসটি H বা সর্বাধিক উচ্চতায় আরোহণ করে এবং তখন উহার উল্লম্ব-বেগ শূন্যে পরিণত হয়।

সুতরাং, $v = u + ft$ সূত্র অনুসারে,

$$0 = u\ \text{সাইন}\ \alpha - gT\ ;$$

অথবা, $gT = u$ সাইন α

$$\therefore\ T = \frac{u\ \text{সাইন}\ \alpha}{g}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (6)$$

১৩৬'৪। প্রাসের উৎপতনকাল ও অনুভূমিক পাল্লা (The time of flight and the horizontal range of a projectile) :

প্রাসের উৎপতনকাল বলিতে উহার শূন্যে অবস্থান-কাল বুঝায়। প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে উপবে উঠিয়া উহা খানিক বাদে নামিতে থাকে,—নামিতে নামিতে শেষপর্যন্ত প্রাসখানি উহার প্রক্ষেপ-বিন্দুগামী সমতলে ফিবিযা আসে। এই সমগ্র সময়টাই প্রাসের উৎপতনকাল। এই সময়ে প্রাসেব মোট উল্লম্ব-সবণ শূন্যে পবিণত হয। অনুভূমিক তলেব সহিত a কোণে ও u বেগে যেন একটি প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয এবং উহার উৎপতনকাল t ও অনুভূমিক পাল্লা যেন R। স্পষ্টতই প্রাসটিব উল্লম্ব প্রারম্ভিক বেগ u সাইন a এবং অনুভূমিক বেগ u কস a।

(i) **উৎপতনকাল :** $S = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্র অনুসারে,

$0 = u$ সাইন $at - \frac{1}{2}gt^2$

$= t\,(u$ সাইন $a - \frac{1}{2}gt)$.

∴ u সাইন $a - \frac{1}{2}gt = 0$ [∵ t শূন্য নয়]

∴ $\frac{1}{2}gt = u$ সাইন a.

∴ **উৎপতনকাল** $\mathbf{t = \dfrac{2u \text{ সাইন } a}{g}}$. ... .. **(7)**

(ii) **অনুভূমিক পাল্লা :**

আবাব অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কবিবার সময় প্রাসটির অনুভূমিক বেগই একমাত্র বিচার্য। কারণ এইদিকে উহাব কোন ত্বরণ নাই। সুতবাং, সমগ্র উৎপতনকাল t সময়ে u কস a সমবেগে প্রাসটির সরণই উহাব অনুভূমিক

$R = u$ কস $a.\,t$

$= u$ কস $a.\dfrac{2u \text{ সাইন } a}{g}$ $\left[\because\ t = \dfrac{2u \text{ সাইন } a}{g}\right]$

$u^2\,2$ সাইন a কস a u^2 সাইন $2a$

∴ **অনুভূমিক পাল্লা** $\mathbf{R = \dfrac{u^2 \text{ সাইন } 2a}{g}}$. **(8)**

অনুসিদ্ধান্ত : সমগ্র উৎপতনকাল $= \frac{2u \text{ সাইন } a}{g}$

এবং উত্থানকাল $= \frac{u \text{ সাইন } a}{g}$ বলিয়া

পতনকাল = উৎপতনকাল − উত্থানকাল

$= \frac{2u \text{ সাইন } a}{g} - \frac{u \text{ সাইন } a}{g}$

$= \frac{u \text{ সাইন } a}{g} =$ উত্থানকাল।

১৩৬'৫। অনুভূমিক পাল্লার বৃহত্তম মান (The greatest measure of horizontal range) :

$R = \frac{u^2 \text{ সাইন } 2a}{g}$ সূত্রে u^2 ও g ধ্রুবক।

সুতরাং, সাইন $2a$-র মান যখন বৃহত্তম তখন R বা অনুভূমিক পাল্লার মান বৃহত্তম। এখন সাইন $2a$-র বৃহত্তম মান হইল 1 এবং তখন $2a = 90°$ অর্থাৎ $a = 45°$।

$\therefore$ R এর বৃহত্তম মান $= \frac{u^2}{g}$.

অতএব, **প্রক্ষেপ-কোণ $a = 45°$ হইলে,**

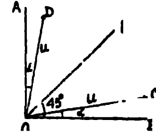
অনুভূমিক পাল্লার বৃহত্তম মান $= \frac{u^2}{g}$.

১৩৬'৬। একটা বিশেষ প্রক্ষেপ-বেগে অতিক্রান্ত একটা বিশেষ অনুভূমিক পাল্লার সাধারণত দুইটি প্রক্ষেপ-কোণ থাকে, যাহারা ঐ বিশেষ বেগে অতিক্রম্য বৃহত্তম পাল্লার প্রক্ষেপ-মুখের সহিত উভয় পার্শ্বে সমান নতিসম্পন্ন হয় (For a particular horizontal range covered with a particular velocity of projection, there are generally two angles of projection which are equally inclined to the direction of the maximum range for that particular velocity of projection) :

OB অনুভূমিক তলে u প্রক্ষেপ-বেগেব যেন প্রক্ষেপ-কোণ a। O হইতে OC, OE, OD ও OA এমনভাবে টানা হইল যে,

$\angle BOC = a$, $\angle BOE = 45°$,

$\angle DOA = a$ এবং $\angle BOA = 90°$ হয়।



১৪৯নং চিত্র

তাহা হইলে, $\angle BOD = \angle BOA - \angle DOA$ $= 90° - a$। অনুভূমিক পাল্লা R হইলে,

$$R = \frac{u^2 \text{ সাইন } 2a}{g} = \frac{u^2}{g} \text{ সাইন } (180° - 2a)$$

$$= \frac{u^2}{g} \text{ সাইন } 2(90° - a),$$

অর্থাৎ, $R = \frac{u^2}{g}$ সাইন 2BOC, অথবা $\frac{u^2}{g}$ সাইন 2BOD.

সুতবাং, u বেগে অতিক্রম্য R পাল্লার জন্য BOC ও BOD এই দুইটি প্রক্ষেপ-কোণ বহিয়াছে।

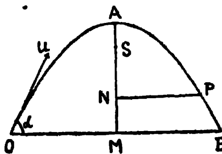
আবার, বৃহত্তম পাল্লার প্রক্ষেপ-কোণ সর্বদাই 45° বলিযা এক্ষেত্রে অতিক্রম্য বৃহত্তম পাল্লাব জন্য u বেগের মুখ OE. স্পষ্টতই, BOC ও BOD এই প্রক্ষেপ-কোণদ্বয় OE-র সহিত যথাক্রমে EOC ও EOD কোণে নত।

কিন্তু $\angle EOC = 45° - a = \angle AOE - \angle DOA = \angle EOD.$

∴ উল্লিখিত প্রক্ষেপ-কোণদ্বয় বৃহত্তম পাল্লার প্রক্ষেপ-মুখের সহিত সমান নত।

১৩৭। নিবাত শূন্যে প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত (The path of a projectile in vacuo is a parabola) :

O বিন্দু হইতে OB অনুভূমিক তলের সহিত a কোণে ও u বেগে প্রক্ষিপ্ত একটি প্রাস সর্বোচ্চ বিন্দু A হইযা যেন P বিন্দুতে নামিযাছে। A হইতে OB এর উপর AM এবং P হইতে AM এর উপর PN লম্ব টানা হইল। A বিন্দুতে প্রাসটির উল্লম্ব-বেগ u সাইন a শূন্যে পরিণত হইয়াছে। তাহার পর g ত্বরণের ফলে t সময়ে যেন উহার উল্লম্বদিকে AN সরণ হইয়াছে। অনুভূমিক দিকে কোন ত্বরণ নাই। কাজেই A বিন্দু অতিক্রমণের পর ঐ t সময়ে



১৫০নং চিত্র

u কস α সমবেগে প্রাসটির অনুভূমিক সরণ যেন NP হয়। ফলে তখন প্রাসটির অবস্থান হয় P বিন্দুতে।

তাহা হইলে, $NP = u$ কস αt ... (i)

এবং $AN = \frac{1}{2}gt^2$ ... (ii)

(i)-এর বর্গকে (ii) দিয়া ভাগ করিলে,

$$\frac{NP^2}{AN} = \frac{u^2 \text{ কস}^2 \alpha t^2}{\frac{1}{2}gt^2} = \frac{2u^2 \text{ কস}^2 \alpha}{g};$$

কিন্তু u, α ও gএর মান নির্দিষ্ট বলিয়া, $\frac{2u^2 \text{ কস}^2 \alpha}{g}$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা।

$$\frac{NP^2}{AN} = \text{ধ্রুবক}$$

ইহা Pএর যে-কোন অবস্থানেরই জন্য সত্য।

এখন, $NP = y$, $AN = x$ ধরিলে,

$$\frac{y^2}{x} = k, \text{ যেখানে } k = \frac{2u^2 \text{ কস}^2 \alpha}{g}, \quad \text{বা } y^2 = kx.$$

স্পষ্টত, ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore$ P এর সঞ্চারপথ এমন একটি অধিবৃত্ত যাহার শীর্ষ A, অক্ষ AM উল্লম্ব-রেখা ও নাভিলম্ব $K = \frac{2u^2 \text{ কস}^2 \alpha}{g} = \frac{2}{g}$ (অনুভূমিক বেগ)^2।

উদাহরণ (১) A particle is projected with a velocity of 65 ft/sec. at an angle of α with the horizon, where $\sin \alpha = \frac{12}{13}$. Find its velocity and direction after $1\frac{1}{4}$ seconds.

এখানে সাইন $\alpha = \frac{12}{13}$ বলিয়া, কস $\alpha = \sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = \frac{5}{13}$.

প্রারম্ভিক উল্লম্ব-বেগ $= 65$ সাইন $\alpha = \overset{5}{\cancel{65}} \times \frac{12}{\cancel{13}}$ বা 60 ফু./সে. ;

$\therefore$ প্রান্তিক উল্লম্ব-বেগ $= 60 - \overset{8}{\cancel{32}} \times \frac{5}{\cancel{4}}$ বা 20 ফু./সে.

এবং অনুভূমিক বেগ $= 65$ কস $\alpha = \overset{5}{\cancel{65}} \times \frac{5}{\cancel{13}}$ বা 25 ফু./সে.।

(i) $1\frac{1}{4}$ সে. পর নির্ণেয় বেগ $= \sqrt{20^2+25^2}$ বা $5\sqrt{4^2+5^2}$

বা $5\sqrt{41}$ ফু./সে. $= 5 \times 6{\cdot}4$ বা 31 ফু./সে. (প্রায়)।

(ii) $1\frac{1}{4}$ সে. পর বস্তুকণাটি যদি অনুভূমিক রেখার সহিত θ কোণে নত হয়, তবে আমরা জানি,

$$\text{ট্যান}\ \theta = \frac{u\ \text{সাইন}\ \alpha - gt}{u\ \text{কস}\ \alpha} = \frac{\overset{5}{\cancel{65}} \times \frac{12}{\cancel{13}} - \overset{8}{\cancel{32}} \times \frac{5}{\cancel{4}}}{\overset{5}{\cancel{65}} \times \frac{5}{\cancel{13}}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore \quad \theta = \text{ট্যান}^{-1}\frac{4}{5}.$$

উদাহরণ (২) A particle is projected with a velocity of 90 ft/sec. at an angle of 60° with the horizon. What will be the magnitude and direction of its velocity when it has risen to a height of 81 ft. ?

বস্তুকণাটি 81 ফুট উচ্চতায় অনুভূমিক রেখার সহিত যদি θ কোণ উৎপন্ন করে, তবে উহার বেগের উল্লম্ব-উপাংশ v সাইন θ। $\therefore\ v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্রানুসারে,

$$\therefore \quad v^2\ \text{সাইন}^2\theta = (90\ \text{সাইন}\ 60°)^2 - 2.32.81,$$

আবার উল্লম্ব-উপাংশ v কস $\theta = 90$ কস $60°$.

$$\therefore \quad v^2\ \text{কস}^2\theta = (90\ \text{কস}\ 60°)^2.$$

$$\therefore \quad v^2(\text{সাইন}^2\theta + \text{কস}^2\theta) = 90^2\ (\text{সাইন}^2 60° + \text{কস}^2 60°) - 2.32.81.$$

$$\therefore \quad v^2 = 90^2 - 72^2 = 162 \times 18 = 81 \times 36.$$

$$\therefore \quad v = 54\ \text{ফু./সে.}।$$

$$\text{আবার, ট্যান}\ \theta = \frac{v\ \text{সাইন}\ \theta}{v\ \text{কস}\ \theta} = \frac{\sqrt{(90 \times \text{সাইন}\ 60°)^2 - 2.32.81}}{90\ \text{কস}\ 60°}$$

$$\frac{\sqrt{\left(90 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 8^2.9^2}}{90 \times}$$

$$\frac{\sqrt{45^2.3-8^2.9^2}}{45}=\frac{9\sqrt{75-64}}{45}=\frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$=\frac{3\cdot32}{5}=\cdot664.$$

∴ ট্যানজেণ্ট সারণী অনুসারে $\theta=33°\ 38'$ (প্রায়)।

উদাহরণ (৩) A ball is thrown with a speed of 50 ft/sec. at an angle of 30° with the horizontal. Find the height to which the ball will rise and the range on the horizontal plane through the point of projection. A wall is at a horizontal distance of 60 ft. from the point of projection and its top is at a vertical height of 5 ft. above the point of projection ; find whether or not the ball will pass over the wall.

[Oxford & Cambridge Jt. Board]

(i) সর্বাধিক উচ্চতা H, প্রারম্ভিক বেগ u এবং প্রক্ষেপ-কোণ α হইলে,

$$H=\frac{u^2\text{ সাইন}^2\alpha}{2g}=\frac{50\times50\times\text{সাইন}^2\ 30°}{64}$$

$$=\frac{2500\times\frac{1}{4}}{64}\text{ বা }\frac{625}{64}\text{ বা }9\frac{49}{64}\text{ ফুট।}$$

(ii) আবার প্রক্ষেপ-সীমা $R=\frac{u^2}{g}$ সাইন 2α

$$=\frac{50^2}{32}\times(\text{সাইন }2\times30°)$$

$$=\frac{50^2}{32}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ বা }\frac{2500\times1\cdot732}{64}$$

$$\text{বা }\frac{4330}{94}\text{ বা }67\frac{13}{16}\text{ ফুট।}$$

(iii) বলটির অনুভূমিক বেগ $=50$ কস $30°$ বা $25\sqrt{3}$ ফু./সে.। উহা যদি t সেকেণ্ডে 60 ফুট যায়, তবে

$$25\sqrt{3}t=60,\quad\text{বা,}\quad t=\frac{60}{25\sqrt{3}}=\frac{12}{5\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{5}\text{ সেকেণ্ড।}$$

$\frac{4\sqrt{3}}{5}$ সেকেণ্ড পরে বলটির উল্লম্ব-সরণ যেন h ফুট।

$$\therefore \quad h = 50 \text{ সাইন } 30^\circ \times \frac{4\sqrt{3}}{5} - 16\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)^2$$

$$= \left(\overset{5}{50} \times \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{5} - 16 \times \frac{48}{25} \right) \text{ ফুট}$$

$$= (20 \times 1{\cdot}732 - 16 \times 1{\cdot}92) \text{ ফুট}$$

$$= (34{\cdot}64 - 30{\cdot}72) \text{ ফুট}$$

$$= 3{\cdot}92 \text{ ফুট ।}$$

অর্থাৎ অনুভূমিক দিকে বলটি যখন প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে 60 ফুট দূরে প্রাচীরটিতে পৌঁছাইবে তখন প্রক্ষেপ-তল হইতে উহা 3·92 ফুট উপরে থাকিবে। কিন্তু প্রাচীরটি সেই তল হইতে 5 ফুট উঁচু। কাজেই বলখানি ঐ প্রাচীর **অতিক্রম করিতে পারে না।**

উদাহরণ (৪) A man can just throw a stone 392 ft. Find the velocity with which he throws it. Find also how high it wlll rise. [C. U. 1912]

(i) প্রশ্নানুসারে লোকটি সর্বাধিক 392 ফুট দূর পর্যন্ত পাথরটি ছুঁড়িতে পারে। আমরা জানি, সর্বাধিক দূরত্বের জন্য প্রক্ষেপ-কোণ 45°। নির্ণেয় প্রক্ষেপ-বেগ u হইলে,

$$\text{প্রক্ষেপ-সীমা} = \frac{u^2}{g} \text{ সাইন } (2 \times 45^\circ) = \frac{u^2}{g}$$

$$u^2 \quad = 392.$$

$$u^2 = 392 \times 32 = (16 \times 7)^2.$$

$$u = 112 \text{ ফু./সে. ।}$$

(ii) সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \text{ সাইন}^2\, 45^\circ}{2g}$

$$= \frac{112 \times \overset{56}{112} \times \frac{1}{2}}{64} \text{ ফুট}$$

$$= \frac{\overset{14}{112} \times \overset{7}{56}}{64 \quad 8} \text{ বা } 98 \text{ ফুট ।}$$

উদাহরণ (৫) A stone is thrown horizontally from the top of a cliff with a velocity of 64 ft./sec. and it hits the ground at a distance of 320 ft. from the foot. Find the height of the cliff. [C. U. 1952]

পাহাড়-চূড়ার নির্ণেয় উচ্চতা যেন h ফুট। পাথরখণ্ডটি অনুভূমিক দিকে 64 ফু./সে. সমবেগে এবং উল্লম্বদিকে 32 ফু./সে² সমত্বরণে ধাবমান। t সেকেণ্ড পরে যদি উহা পাহাড়ের পাদদেশগামী সমতলে নামিয়া আসে তবে ঐ t সেকেণ্ডেই উহা 320 ফুট অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ $64t = 320$ বা $t = 5$ সেকেণ্ড।

$$h = \frac{1}{2} \times 32.5^2 \text{ বা } 400 \text{ ফুট।}$$

উদাহরণ (৬) A tennis-ball served horizontally from a height 6·25 ft., strikes the ground at a point 60 ft. away from the server. If it just touches the net 40 ft. away from the server, find the height of the net. [U. P. B. 1941]

বলখানি যেন u বেগে চলে। এই বেগ অনুভূমিক। উল্লম্বদিকে একমাত্র অভিকর্ষজ ত্বরণ বলখানির উপর সক্রিয়। t সেকেণ্ড পর যদি বলখানি মাটিতে পড়ে, তবে

$$\frac{1}{2} gt^2 = 6{\cdot}25 \text{ অথবা } 16t^2 = \frac{25}{4} \text{ বা } t^2 = \frac{25}{64}.$$

$$t = \frac{5}{8} \text{ সে.।}$$

আবার, $ut = 60$ অথবা $\frac{5}{8} u = 60$; $\therefore$ $u = \frac{60 \times 8}{5}$,

বা 96 ফু./সে.।

এখন জালখানি অনুভূমিক দিকে, 40 ফুট দূরে অবস্থিত। 40 ফুট দূরে যাইতে বলটির যদি t' সে. সময় লাগে, তবে

$$96t' = 40 \text{ বা } t' = \frac{40}{96} \text{ সে.;}$$

এই $\frac{5}{12}$ সেকেণ্ডে বলখানির উল্লম্ব-সরণ $= 16 \times (\frac{5}{12})^2$ বা $\frac{16 \times 25}{12 \times 12}$

বা $\frac{25}{9}$ ফুট বা $2\frac{7}{9}$ ফুট।

স্পষ্টত, জালখানির উচ্চতা $= (6\frac{1}{4} - 2\frac{7}{9})$ ফুট

$$= \left(\frac{25}{4} - \frac{25}{9}\right) \text{ ফুট} = \frac{25 \times 5}{36} \text{ ফুট}$$

$$= \frac{125}{36} \text{ বা } 3\frac{17}{36} \text{ ফুট।}$$

উদাহরণ (৭) A bomb-shell on striking the ground (supposed to be horizontal) bursts scattering its fragments with velocities of magnitude u in different directions ; find the area of the ground covered by the fragments. [C. U. 1938 ; B.H.U. 1933]

বোমাটির টুকরাগুলির প্রত্যেকটির বেগ u। এখন ইহাদের যেগুলি অনুভূমিক তলের সহিত 45° কোণে বিক্ষিপ্ত তাহারাই সর্বাধিক দূরে ছিটকাইয়া পড়িবে।

স্পষ্টতই, এই সর্বাধিক প্রক্ষেপ-সীমা $= \frac{u^2}{g}$ সাইন $(2 \times 45°)$ বা $\frac{u^2}{g}$.

$\therefore$ $\frac{u^2}{g}$-এর সমান ব্যাসার্ধযুক্ত একটি বৃত্তের মধ্যেই বিক্ষিপ্ত টুকরাগুলি সীমাবদ্ধ থাকে।

এই বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi\left(\frac{u^2}{g}\right)^2 = \frac{\pi u^4}{g^2}$.

উদাহরণ (৮) Particles are projected simultaneously with velocities of magnitude V from a given point in different directions in the same vertical plane. Prove that in t seconds they all lie on a circle. [C. U. 1941, '53]

যে-কোন একটি বস্তুকণা অনুভূমিক রেখার সহিত যেন a কোণে ও V বেগে প্রক্ষিপ্ত। এই V বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব-উপাংশ যথাক্রমে V কস a ও V সাইন a।

t সময় পর প্রদত্ত বিন্দু হইতে কণাটির অনুভূমিক ও উল্লম্ব দূরত্ব যদি যথাক্রমে x ও y হয়, তবে

$$x = \text{V কস } at \qquad \dots \qquad \dots \quad (1)$$

$$\text{এবং} \quad y = \text{V সাইন } at - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad y + \tfrac{1}{2}gt^2 = \text{V সাইন } at. \qquad \dots \qquad \dots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) ও (5) হইতে,

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2}gt)^2 = \text{V}^2 \,(\text{সাইন}^2 a + \text{কস}^2 a)\, t^2$$
$$= \text{V}^2 t^2 = (\text{V}t)^2.$$

স্পষ্টতই ইহা এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ যাহার কেন্দ্র $(0, \; -\tfrac{1}{2}gt)$ বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ $= \text{V}t$. অতএব, কণাগুলি t সেকেণ্ড পরে $\text{V}t$ ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের পরিধিতে শায়িত হইবে।

উদাহরণ (৯) An aeroplane flying with a constant velocity v, at a constant height h, passes directly over a gun. When the elevation of the aeroplane above the horizontal plane is θ as seen from the gun, the gun is fired point blank at it. Show that the shot hits the aeroplane, if

$$2(\text{V} \cos \theta - v)v \tan^2\theta = gh,$$

where V is the initial velocity of the shot, its path being parabolic. [C. U. 1932]

ধরা যাক, কামানটি A বিন্দুতে অবস্থিত। বিমানখানি সর্বদা h ফুট উচ্চে থাকিয়া যখন A বিন্দুর সহিত θ কোণে আসিয়াছে ঠিক তখন কামান ছোঁড়া হইল। সেই মুহূর্তে বিমানখানির অবস্থান D এবং D হইতে AC অনুভূমিক রেখার উপর লম্ব DB হইলে,

$$\text{DB} = h, \quad \angle\text{DAB} = \theta \text{ এবং ট্যান } \theta = \frac{h}{\text{AB}} \qquad \dots \quad (1)$$

এখন, কামানের গোলাটি যে অধিবৃত্ত-পথে ধাবমান, t সময় পরে যেন বিমানটি তাহাকে E বিন্দুতে ছেদ করিযা চলিয়া যায়। E হইতে লম্ব যেন EC. স্পষ্টতই $\text{EC} = h$।

v বেগে D হইতে E বিন্দুতে যাইতে বিমানটির t সময় লাগে

$$DE = BC = vt. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

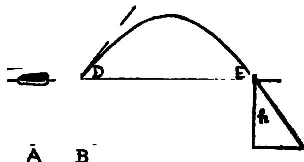
AC অনুভূমিক দূরত্ব যাইতে গোলাটির t সময় লাগিলেই, উহা বিমানটিকে আঘাত করিবে।

$$\therefore \quad AC = V \text{ কস } \theta t,$$

$$AB = AC - BC = V \text{ কস } \theta t - vt \quad [\because \; BC = vt]$$

$$\text{ট্যান } \theta = \frac{h}{AB} = \frac{h}{(V \text{ কস } \theta - v)t}$$

$$t = \frac{h}{(V \text{ কস } \theta - v) \text{ ট্যান } \theta}.$$



১৫১নং চিত্র

আবার গোলাটির উল্লম্ব-সরণ বিচার করিলে,

$$h = V \text{ সাইন } \theta t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$= V \text{ সাইন } \theta \times \frac{h}{(V \cos \theta - v) \text{ ট্যান } \theta} - \tfrac{1}{2} g \frac{h^2}{(V \text{ কস } \theta - v)^2 \text{ ট্যান}^2 \theta}$$

$$= \frac{h\{V \text{ সাইন } \theta \text{ ট্যান } \theta (V \text{ কস } \theta - v)\} - \tfrac{1}{2} g h}{(V \text{ কস } \theta - v)^2 \text{ ট্যান}^2 \theta}$$

উভয় পক্ষকে h দ্বারা ভাগ করিয়া বজ্রগুণন দ্বারা,

$$(V \text{ কস } \theta - v)^2 \text{ ট্যান}^2 \theta = \frac{V \text{ সাইন } \theta \times \text{সাইন } \theta (V \text{ কস } \theta - v)}{\text{কস } \theta} - \tfrac{1}{2} g h,$$

$$\text{বা, } \tfrac{1}{2} g h = \frac{V \text{ সাইন}^2 \theta (V \text{ কস } \theta - v)}{\text{কস } \theta} - (V \text{ কস } \theta - v)^2 \text{ ট্যান}^2 \theta$$

$$= (V \text{ কস } \theta - v) \text{ সাইন}^2 \theta \left\{ \frac{V}{\text{কস } \theta} - \frac{(V \text{ কস } \theta - v)}{\text{কস}^2 \theta} \right\}$$

$$= (V \text{ কস } \theta - v) \text{ সাইন}^2 \theta \left\{ \frac{V \text{ কস } \theta - V \text{ কস } \theta + v}{\text{কস}^2 \theta} \right\}$$

$$= (V \text{ কস } \theta - v) \frac{\text{সাইন}^2 \theta}{\text{কস}^2 \theta} v,$$

$$\text{বা, } \quad gh = 2(V \text{ কস } \theta - v)\, v \text{ ট্যান}^2 \theta,$$

$$\text{অথবা, } \quad 2(V \text{ কস } \theta - v)\, v \text{ ট্যান}^2 \theta = gh.$$

অনুশীলনী ২৪

1. A particle is projected with a velocity of 160 ft./sec. at an angle of α with the horizon. If $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, find its velocity and direction at the end of two and a half seconds.

2. A particle is projected with a speed of 100 ft./sec. at an angle of 60° with the horizontal. Calculate the direction of its motion when it has been moving for 2 seconds and also calculate its speed (to three significant figures) at that instant.
[Oxford & Cambridge University]

3. A particle is projected with a velocity of 120 ft./sec. and at an angle of 60° with the horizontal. What will be its velocity and direction at the height of 81 ft. ?

4. A projectile thrown from a point in a horizontal plane comes back to the plane in 4 secs. at a distance of 64 yds. from the point of projection. Find the velocity of projection in feet per sec. [C. U. 1913]

5. A ball is thrown from the ground with a velocity of 40 ft./sec. In a direction making an angle of 60° with the horizontal. Find the maximum height attained and the horizontal range. [Oxford & Cambridge Jt. Board]

6. A bullet is projected with a velocity of 640 ft. per second at an angle of 30° with the horizontal. Find, (a) the greatest height attained, (b) the range on the horizontal plane and (c) the total time of flight. [B. H. U. 1957]

7. An aviator at a height of 2000′ drops a bomb when travelling horizontally at 60 miles per hour. How far must he be horizontally from the object he wishes to hit ?
[U. P. B. 1944]

8. A particle is projected at an angle of elevation, the sine of which is 3/5 and its range on the horizontal plane through the point of projection is 3 miles. Find the velocity of projection. ($g = 32$) [C. U. 1920]

9. With what velocity must a stone be projected horizontally from the top of a tower 200 ft. high, so as to reach a point on the ground 800 ft. from the foot of the tower ?
[Utkal U. 1948]

10. A stone is thrown with a velocity of 80 ft./sec. at an elevation of 45°. With what velocity must another stone be

projected vertically upwards from the same point of projection so that both may rise to the same height ? [U. P. B. 1945]

11. A shot is seen to pass horizontally just over a vertical wall 64 ft. high and 96 ft. away. Find its velocity and direction of projection. [Patna Suppl., 1948]

12. A tennis ball is served horizontally from a height of 6 ft. and it just clears the net 3 ft. high and distant 39 ft. from the server. Find the initial velocity of the ball, and the point where it strikes the ground. [H. S. B. S. E. 1961]

13. A ball is thrown at an angle $\tan^{-1}(\frac{4}{3})$ to the horizontal so that it just clears the top of a wall 60 ft. distant horizontally. If the ball takes 2·2 seconds to reach the top of the wall, find :

(i) the time taken to reach the highest point,

(ii) the velocity of projection,

(iii) the height of the wall.

[Oxford & Cambridge Jt. Board]

14. Find the velocity and the direction of projection of a shot which passes in a horizontal direction just over the top of a wall which is 50 yds. off and 75 ft. high.

[Patna 1929, '35 ; U. P. B. 1947, '49 ; Utkal U. 1947 ; C. U. 1924]

15. A body is projected with a velocity of 32 ft. per sec., from the top of a tower 192 ft. high in a direction making an angle of 30° with the horizon. Find when and at what distance from the foot of the tower, it will strike the ground.

[C. U. 1955]

16. Two shells are fired simultaneously from points on level ground ; one shell has an initial speed of 800 ft./sec. at an inclination α to the horizontal, where $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; the other has the same initial speed at an inclination β to the horizontal, where $\sin \beta = \frac{4}{5}$. Find the time that elapses before the first shell hits the ground. [Oxford & Cambridge Jt. Board]

17. A cricket ball thrown from a height of 6 feet, at an angle of 30° with the horizon, with a speed of 60 feet per second, is caught by another fieldsman, at a height of 2 feet from the ground. How far apart were the two men ?

[U. P. B. 1940]

18. From the top of a cliff 48 ft. high, a gun is discharged so that the shot starts with a velocity of 64 ft./sec. at an angle of 30° to the horizon. Find where it hits the ground at the bottom of the cliff.

19. A ball, thrown from a window towards the ground with an initial velocity of 40 ft./sec. in a direction 60° below the horizontal, hits the ground 1 sec. later. Find the magnitude and direction of its velocity at the moment before impact. Find also the height from which it was thrown.

[London University]

20. A shot is fired from a gun on the top of a cliff, 400 ft. high with a velocity of 768 ft. per second, at an elevation of 30°. Find the horizontal distance of the point where the shot strikes water from the vertical line through the gun.

[P. U. 1942]

21. A ball is thrown from a point 7 ft. above the level ground. It rises to a maximum height of 16 ft. above the ground and strikes it at a horizontal distance of 105 ft. from the point of projection. Find the velocity with which the ball is thrown and the angle at which it is thrown.

[B. H. U. 1951]

22. A particle is projected with a velocity 48 ft./sec. Find the greatest range on the horizontal plane through the point of projection and the two directions of projection to a given range of 36 ft. [H. S. B. S. E. 1962]

23. A body is projected at such an angle that the horizontal range is three times the greatest height. Find the angle of projection, and if, with this angle, the range is 400 yards, find the necessary velocity of projection and time of flight.

[B. H. U. 1954]

24. H and H′ being greatest heights in the two paths of a projectile for a given range R, show that $R = 4\sqrt{HH'}$.

25. A body projected with the same velocity at two different angles covers the same horizontal range R. If t, t' be the two times of flight, prove that

$$R = \tfrac{1}{2} g t . t'.$$ [P. U. 1945]

26. If R be the horizontal range and T the time of flight for the projectile, show that the angle of projection α is given by $2R \tan \alpha = g T^2$. [W. B. H. S. 1960]

27. A body is projected at an angle α to the horizon so as to clear two walls of equal height a, at a distance $2a$ from each other. Show that the range is equal to $2a \cot \frac{\alpha}{2}$.

[C. U. 1943]

28. If r be the horizontal range of a projectile under gravity and h the greatest height attained, show that the velocity of projection v is given by

$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{r^2}{16h}.$$

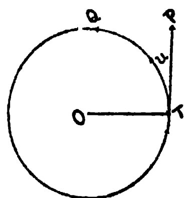
[H. S. B. S. E. 1963]

অষ্টাদশ পরিচ্ছেদ

বৃত্তপথে সমহার গতি ও সরল সমঞ্জস গতি
(Uniform circular motion and simple Harmonic motion)

১৩৮। বৃত্তপথে সমহার গতি (Uniform circular motion) :

বৃত্তপথে সমহার গতি সমদ্রুতির উদাহরণ। এই গতি বা দ্রুতি প্রতিমুহূর্তে দিক্‌ পরিবর্তন করিয়া বাঁকিয়া যাইতেছে। কিন্তু ইহা সম্ভব হয় কি করিয়া? নিউটনের প্রথম সূত্র বলে যে, বাহ্য বল-প্রয়োগে বাধ্য না হইলে গতিশীল বস্তু সর্বদা সমহার ও **সরলরেখায়** চলিতে থাকিবে। এক্ষেত্রে গতির হার ঠিকই সমহার আছে, কিন্তু উহার পথ সরলরেখায় নহে, বক্ররেখায়। সুতরাং, এখানে কোন-না-কোন বল নিশ্চয় সক্রিয় এবং সেই বলেরই ক্রিয়ায় সমহারে ও সরলরেখায় একটা বেগ বাঁকিয়া বৃত্তপথে সমদ্রুতিতে পরিণত হইয়াছে। এখন প্রশ্ন, এই বলের ক্রিয়ামুখ কোন্‌দিকে? আমরা জানি, বলের কাজ নিজের অভিমুখে ত্বরণ সঞ্চার করা; কাজেই এখানেও ত্বরণের মুখ বলের ক্রিয়ামুখেই হইবে। সহজেই বুঝা যায় যে, এই বল তথা ত্বরণের গতিমুখ এমন একদিকে যে, ঐ বল-জনিত ত্বরণ আলোচ্য ক্ষেত্রে সমদ্রুতির কিছুমাত্র হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটায় না। ঘটাইলে ঐ সমদ্রুতির মান নিশ্চয় ক্রমাগত বদলাইতে থাকিত এবং ফলে উহা অসমদ্রুতি হইত। ত্বরণ মূলবেগের লম্বদিকে সক্রিয় হইলেই মাত্র এমন হইতে পারে। কারণ, একমাত্র সেই ক্ষেত্রেই মূলবেগের দিকে ঐ ত্বরণের কোন বিশ্লেষিতাংশ থাকিবে না এবং সেই কারণে উহার দিক্‌-পরিবর্তন হইলেও মান বা হার-পরিবর্তন হইবে না।



১৫২নং চিত্র

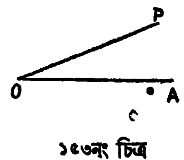
মনে কর, TP মুখে u সমবেগে একটি বস্তু চলমান। বাহ্য বল উহাকে বাধ্য না করিলে ঐ TP রেখায় উহা u সমবেগে বরাবর চলিতে থাকিত। কিন্তু

মনে কর, উহা যেন TQ বৃত্তপথে u সমদ্রুতিতেই চলিতেছে। তাহা হইলে বস্তুটির উপর নিশ্চয় কোন বল কাজ করিতেছে এবং নিজমুখে একটা ত্বরণ উৎপন্ন করিতেছে। এই ত্বরণ মূলবেগ u-র মুখে বা TP রেখায় সক্রিয় হইতেই পারে না, কারণ পারিলে বস্তুটির দ্রুতি সমহার থাকিত না, ক্রমাগত উহার মান পরিবর্তিত হইত। বস্তুতঃ TP-র লম্বদিক ছাড়া আর যে-কোন দিকে সক্রিয় হইলে ঐ ত্বরণের একটা বিশ্লেষিতাংশ TP-মুখে u-বেগের ক্রমাগত মান পরিবর্তন ঘটাইত। সুতরাং, ত্বরণটি নিশ্চয় TP-র লম্বদিকে TO-মুখে সক্রিয়। ইহাতে ফল একমাত্র এই হইয়াছে যে, u-বেগের ক্রমাগত দিক্ পরিবর্তন হইলেও মান পরিবর্তন হইতেছে না। সেইজন্যই বস্তুটি বৃত্তপথে সমদ্রুতিতে চলমান। স্পষ্টতঃ TP ঐ বৃত্তপথের স্পর্শক। এবং TO ঐ বৃত্তের পরিধি হইতে কেন্দ্রমুখী একটি ব্যাসার্ধ। সুতরাং, TO-মুখে কেন্দ্রমুখী বা কেন্দ্রাভিগ একটা সমহার ত্বরণের অধীন হইলেই স্পর্শক TP-মুখে u বেগে সঞ্চরমাণ বস্তুটি বৃত্তপথে সমহার গতিসম্পন্ন হইতে পারে। ক্রমে আমরা এই ত্বরণ ও বৃত্তপথে এই গতির আরও বিশ্লেষণ করিতেছি।

১৩৯। কৌণিক বেগ (Angular velocity) :

(ক) বেগ বলিতে আমরা সরলরেখায় স্থান-পরিবর্তনের হার বুঝি। বৃত্তপথে গতির বেলায় তাই ইহার দ্বারা বিশদভাবে কাজ চলে না। সেইজন্য আরেক প্রকার বেগের সূত্র বাঁধিয়া লওয়ার প্রয়োজন। শেষোক্ত এই বেগের নাম হইল **কৌণিক বেগ।** মোটামুটিভাবে নাম হইতেই বুঝা যায় যে, কোণের পরিবর্তন-হার দ্বারা এই বেগ সূচিত হয়।

একটি সমতলস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর চতুর্দিকে সঞ্চরমাণ অপর একটি বিন্দুর কৌণিক বেগ বলিতে ঐ সমতলস্থিত, প্রথমোক্ত বিন্দুগামী একটি স্থির-সরলরেখার সহিত ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা প্রথমোক্ত বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার পরিবর্তন-হার বুঝায়।



১৫৩নং চিত্র

উদাহরণস্বরূপ : পাশের চিত্রে O বিন্দুর চারিদিকে সঞ্চরমাণ P বিন্দু O বিন্দুগামী স্থির-সরলরেখা OA-র সহিত POA কোণ উৎপন্ন করে। এই POA কোণ

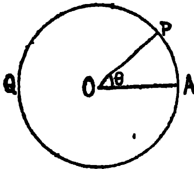
যে হারে বাড়ে বা কমে সেই হারই O বিন্দুর চারিদিকে P বিন্দুর কৌণিক বেগ।

(খ) **সমহার কৌণিক বেগ (Uniform angular velocity)** : একই সমতলে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর চারিদিকে সঞ্চরমাণ অপর একটি বিন্দু যদি সমান সমান সময়ে সমান সমান কোণ-পরিমাণ আবর্তিত হয়, তখন প্রথম বিন্দুর চারিদিকে দ্বিতীয় বিন্দুর কৌণিক বেগ-কে সমহার বলা হয়।

অপরপক্ষে, প্রথম বিন্দুর চারিদিকে দ্বিতীয় বিন্দু যদি সমান সমান সময়ে অসমান কোণ-পরিমাণ আবর্তিত হয়, তবে উহার কৌণিক বেগ-কে অসমহার বলা হয়।

১৪০। r-ব্যাসার্ধ-যুক্ত কোন বৃত্তের পরিধি-পথে v সমদ্রুতিতে চলমান বিন্দুর ঐ বৃত্তের কেন্দ্রের চারিদিকে কৌণিক বেগ $\frac{v}{r}$.

r-ব্যাসার্ধযুক্ত APQ-র কেন্দ্র O। উহার পরিধি-পথে APQ অভিমুখে যেন P বিন্দু v সমদ্রুতিতে সঞ্চরমাণ। P বিন্দুর দ্রুতি সমহার বলিয়া উহা সমান সমান সময়ে সমান চাপ অতিক্রম করিবে। কিন্তু সমান সমান চাপ কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। অতএব, OP রেখা সমান সমান সময়ে সমান সমান কোণ-পরিমাণ আবর্তিত হয়; অর্থাৎ O বিন্দুর চারিদিকে P বিন্দুর কৌণিক বেগ সমহার।



১৫৪নং চিত্র

এখন t সময়ে P যেন A হইতে P অবস্থানে যায় অর্থাৎ AP চাপ অতিক্রম করে। কিন্তু t সময়ে v সমদ্রুতিতে অতিক্রান্ত চাপের দৈর্ঘ্য vt একক।

$\therefore$ AP $= vt$. এই vt একক চাপ-কেন্দ্রে $\frac{vt}{r}$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ $\angle AOP = \theta = \frac{vt}{r}$;

কিন্তু t সময়ে θ কোণ উৎপন্ন হইলে,

এক একক সময়ে উৎপন্ন কোণ নিশ্চয় $\frac{\theta}{t}$ রেডিয়ান।

সংজ্ঞা অনুসারে $\frac{\theta}{t}$-ই P বিন্দুর কৌণিক বেগ। এই কৌণিক বেগকে যদি ω বলা যায়, তবে

$$\frac{\theta}{t}=\frac{\frac{vt}{r}}{t}=\frac{vt}{rt}=\frac{v}{r}$$

অনুসিদ্ধান্ত: r-ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের পরিধিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর চারিদিকে ঐ পরিধি-পথে v সমদ্রুতিতে সঞ্চরমাণ P বিন্দুর কৌণিক বেগ $=\frac{v}{2r}$.

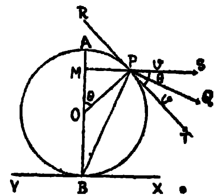
P বিন্দু t সময়ে r-ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের কেন্দ্রে যদি θ কোণ উৎপন্ন করে, তবে সেই θ কোণ vt চাপের উপর দণ্ডায়মান। একই চাপ পরিধিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দুতে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করিবে।

$\therefore$ ঐ বিন্দুর চারিদিকে P-র কৌণিক বেগ $=\frac{\theta}{2t}=\frac{v}{2r}$.

১৪০'১। চাকার পরিধিস্থ বিন্দু-বিশেষের বেগ:

r-ব্যাসার্ধযুক্ত একটি চাকার কেন্দ্র O এবং উহার পরিধিস্থ একটি বিন্দু P।

চাকাটি তথা উহার কেন্দ্র O একপাক ঘুরিয়া আসিতে $2\pi r$ পরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করিবে। একই সময়ে ঐ চাকার পরিধিস্থ P বিন্দুও $2\pi r$ পরিমাণ বৃত্তপথ অতিক্রম করিবে। কাজেই, O কেন্দ্রের বেগ v হইলে, P বিন্দুর অন্যতম বেগও v হইবে। তবে কেন্দ্রের বেগ হইবে ভূতলের সমান্তরাল রেখায় আর P বিন্দুর এই বেগ হইবে বৃত্তটির স্পর্শক-রেখায়। কিন্তু চাকাটি একপাক ঘুরিয়া আসায় কেন্দ্র O অনুভূমিক রেখায় যতটা অপসারিত হইবে, চাকার পরিধিস্থ প্রত্যেক বিন্দুও ততটাই অপসারিত হইবে।



১৫৫নং চিত্র

সুতরাং, কেন্দ্রবিন্দু O-র মতো পরিধির অন্যতম বিন্দু P-র v পরিমাণ অনুভূমিক বেগও রহিয়াছে।

অতএব, P বিন্দুর যুগপৎ অনুভূমিক PS রেখায় v বেগ এবং RPT স্পর্শক-রেখায় v বেগ রহিয়াছে।

(i) AB যদি উল্লম্ব-ব্যাস হয়, SPM অনুভূমিক বলিয়া উহার উপর লম্ব এবং RT স্পর্শকের উপর OP ব্যাসার্ধ-লম্ব।

$\therefore$ $\angle AOP = \angle OPM$-এর পূরক $= \angle RPM = \angle SPT = \theta$.

(ধরা হইল)

$\therefore$ PS ও PT বরাবর প্রত্যেক দিকে P বিন্দুর বেগ v।

$\therefore$ P-র লব্ধিবেগ $\angle SPT$-র সমদ্বিখণ্ডক PQ বরাবর সক্রিয় এবং

উহার মান $= \sqrt{v^2 + v^2 + 2v.v \text{ কস } \theta} = v\sqrt{2(1 + \text{কস } \theta)}$

$$= v\sqrt{2(1 + 2 \text{ কস}^2 \frac{\theta}{2} - 1)}$$

$$= v\sqrt{2.2 \text{ কস}^2 \theta/2}$$

$$= 2v \text{ কস } \frac{\theta}{2}.$$

(ii) দ্বিতীয়তঃ,

$$\theta = \angle AOP = 2\angle OBP = 2\angle OPB,$$

বা, $\angle OPB = \frac{\theta}{2}$;

আবার, $\angle OPT = \angle OPB + \angle BPT = \frac{\theta}{2} + \angle BPT$

$$= \angle TPQ + \angle BPT = \angle BPQ = 90°.$$

$\therefore$ P-র লব্ধিবেগ BP-র উপর লম্বদিকে PQ বরাবর সক্রিয়।

(iii) তৃতীয়তঃ, B বিন্দুর চারিদিকে P বিন্দুর কৌণিক বেগ

$$= \frac{2v \text{ কস } \frac{\theta}{2}}{BP}, \quad \left[\omega = \frac{v}{r} \text{ সূত্রানুসারে} \right]$$

কিন্তু BOP ত্রিভুজের BO = OP = r এবং $\angle AOP = \theta$ বলিয়া,

$$BP^2 = BO^2 + OP^2 + 2BO.OP. \text{ কস } (180^\circ - \theta)$$
$$= r^2 + r^2 + 2r.r \text{ কস } \theta$$
$$= 2r^2 + 2r^2 \text{ কস } \theta$$
$$= 2r^2(1 + \text{কস } \theta)$$
$$= 2r^2.2 \text{ কস}^2 \frac{\theta}{2}$$
$$= \left(2r \text{ কস } \frac{\theta}{2}\right)^2;$$

$$\therefore \; BP = 2r \text{ কস} \frac{\theta}{2}.$$

$\therefore$ **B বিন্দুর চারিদিকে P বিন্দুর কৌণিক বেগ** $= \dfrac{2v \text{ কস} \frac{\theta}{2}}{2r \text{ কস} \frac{\theta}{2}} = \dfrac{v}{r}$

= কেন্দ্র O বিন্দুর চারিদিকে P-বিন্দুর কৌণিক বেগ।

(iv) চতুর্থতঃ, (ক) P বিন্দু যখন সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ A বিন্দুতে আসে, তখন স্পর্শক-রেখা অনুভূমিক হয়। ফলে P-র দুইটি বেগই অনুভূমিক রেখার একই দিকে সক্রিয় হয়। অতএব, তখন তাহার বেগ হয় $v + v$ বা $2v$.

(খ) P যখন সর্বনিম্ন অবস্থানে বা B বিন্দুতে আসে, তখন স্পর্শক-রেখা আবার অনুভূমিক হয়। কিন্তু ঐ রেখায় P বিন্দুর v-বেগ তখন পিছনদিকে BY-মুখে সক্রিয় হয়। ফলে, সম্মুখ ও পশ্চাৎ উভয় দিকে সক্রিয় বেগ সমান বলিয়া P-র লব্ধিবেগ শূন্যে পরিণত হয়। অর্থাৎ লব্ধিবেগ তখন $= v - v = 0$.

উদাহরণমালা

(১) 7 ফুট ব্যাসার্ধযুক্ত একটি বৃত্তের পরিধি-পথে 21 ফু/সে. সমদ্রুতিতে সঞ্চরমাণ বিন্দুর কৌণিক বেগ কত ?

কৌণিক বেগ, সমদ্রুতি ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে ω, v ও r হইলে,

$$\omega = \frac{v}{r}$$
$$= \frac{21}{7} \text{ বা 3 রেডিয়ান/সে.।}$$

(২) The diameter of a wheel is $1\frac{2}{5}$ ft. If its angular velocity about the centre is 5π radians per second, what is its speed in miles per hour ?

$$\text{চাকাটির ব্যাসার্ধ} = \frac{1\frac{2}{5}}{2} \text{ বা } \frac{7}{10} \text{ ফুট}$$

এবং উহার কৌণিক বেগ $= 5\pi$ রেডিয়ান ;

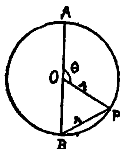
$\therefore$ উহার সমদ্রুতি $= \omega r = 5\pi \times \frac{7}{10}$ ফু./সে.

$$= 5 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{10} \text{ ফু./সে.}$$

$$= \frac{11 \times 3600}{3 \times 1760} \text{ মাইল/ঘণ্টা}$$

$$= 7\frac{1}{2} \text{ মাইল/ঘণ্টা।}$$

(৩) Show that the velocity of a point on the circumference of a wheel, equidistant from its lowest point and the centre is half that of the highest point of the wheel rolling on.



১৫৬নং চিত্র

চাকাটির কেন্দ্রে O, সর্বোচ্চ বিন্দু A এবং সর্বনিম্ন বিন্দু B এবং B ও O বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী পরিধিস্থ বিন্দু P হইলে,

BP = OP = OB = r ; অতএব, OBP ত্রিভুজ সমবাহু এবং সেই কারণে উহার প্রত্যেক কোণ $= 60°$,

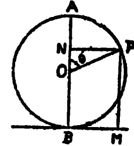
$\therefore$ $\angle AOP = 180° - \angle BOP = 180° - 60° = 120°$. এখন সর্বোচ্চ বিন্দু A-র বেগ যদি $2v$ হয়, তবে P বিন্দুর বেগ $= 2v$ কস $\frac{120°}{2}$ [অ. ১৪০·১ (i)]

$$= 2v \text{ কস } 60°$$

$$= 2v.\tfrac{1}{2} = v = \text{সর্বোচ্চ বিন্দুর বেগের অর্ধেক।}$$

(৪) Show that the velocity of a point on the circumference of a wheel 'a' units above the ground is $v\sqrt{\frac{2a}{r}}$, where v is the velocity, and r the radius of the wheel.

PAB চাকার ব্যাসার্ধ r। উহার পরিধিস্থ P বিন্দু মাটি হইতে a একক ঊর্ধ্বে অবস্থিত এবং উহার সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন পরিধিস্থ বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A ও B। $\angle AOP = \theta$ হইলে,



১৫৭নং চিত্র

$$P \text{ বিন্দুর বেগ} = 2v \text{ কস} \frac{\theta}{2}$$

P হইতে BA ও ভূতলের উপর লম্বদ্বয় যথাক্রমে PN ও PM।

$$\text{এখন, কস } \theta = \frac{ON}{OP} = \frac{OA - AN}{OP} = \frac{OA - (AB - BN)}{OP}$$

$$= \frac{OA - (AB - PM)}{OP} = \frac{r - (2r - a)}{r} = \frac{a - r}{r}$$

$$= \frac{a}{r} - 1.$$

$$\therefore 2 \text{ কস}^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \frac{a}{r} - 1 \qquad \left[\because \text{ কস } \theta = 2 \text{ কস}^2 \frac{\theta}{2} - 1\right]$$

$$\text{বা, } 2 \text{ কস}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{a}{r}$$

$$\text{বা, } 4 \text{ কস}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2a}{r}$$

$$\therefore 2 \text{ কস} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2a}{r}}.$$

$$\text{P-র নির্ণেয় বেগ} = 2v \text{ কস} \frac{\theta}{2} = v.2 \text{ কস} \frac{\theta}{2} = v\sqrt{\frac{2a}{r}}.$$

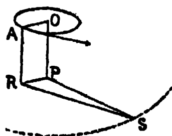
(৫) The angular velocity of a grinding stone (জাঁতা) $1\frac{1}{2}$ ft. in diameter is $5\frac{1}{3}$ radians per sec. It is placed 1 ft. above the ground while it grinds pea. Shew that the particles ejected from it will trace on the ground a circle of radius $1\frac{1}{4}$ ft.

জাঁতার পরিধির যে-কোন বিন্দু A-র কৌণিক বেগ $= \frac{16}{3}$ রেডিয়ান/সে.

$$\therefore \text{ বিন্দুর সমদ্রুতি } v = \omega r = \frac{16}{3} \times \frac{3}{4} \text{ বা } 4 \text{ ফু./সে.।}$$

জাঁতার কেন্দ্র O হইতে উল্লম্ব-রেখায় ভূতলস্থিত P বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ OP = 1 ফুট। এই 1 ফুট পতনের সময় যদি t হয়, তবে

$$\frac{1}{2}gt^2 = 1, \text{ বা } t^2 = \frac{1}{16}, \text{ বা } t = \frac{1}{4} \text{ সেকেণ্ড।}$$



১৫৮নং চিত্র

এখন A বিন্দু হইতে একটি কণা যদি জাঁতার সমদ্রুতিসহ অর্থাৎ 4 ফু./সে. সমবেগে ছিটকাইয়া পড়ে, তবে $\frac{1}{4}$ সেকেণ্ডে উল্লম্বদিকে AR বরাবর 1 ফুট নামিবে এবং ঠিক সেই সময়ে অনুভূমিক দিকে $4 \times \frac{1}{4}$ বা 1 ফুট দূরে S বিন্দুতে উপনীত হইবে।

স্পষ্টতই, PR = OA = $\frac{3}{4}$ ফুট এবং RS = 1 ফুট।

এখন, কণাটির RS-মুখে অনুভূমিক বেগ A বিন্দুতে জাঁতার স্পর্শক-রেখায় বলিয়া OA তথা PR-এর লম্বদিকে সক্রিয়। অর্থাৎ RS রেখা RP রেখার উপর লম্ব।

$$PR^2 + RS^2 = PS^2,$$

$$\text{বা, } \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + 1^2 = PS^2, \text{ অথবা, } PS = \sqrt{\tfrac{25}{16}} = \tfrac{5}{4} \text{ ফুট।}$$

∴ A হইতে বিক্ষিপ্ত কণাটির মতো অপর প্রত্যেকটি কণা ভূতলে P বিন্দু হইতে $\frac{5}{4}$ বা $1\frac{1}{4}$ ফুট দূরে পড়িবে। অতএব, P-কে কেন্দ্র করিয়া এবং $1\frac{1}{4}$ ফুট ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিই কণাগুলির সঞ্চারপথ হইবে।

অনুশীলনী ২৫

1. Find the angular velocity of a particle moving round a fixed point at 10 ft./sec., its constant distance from the fixed point being 4 ft.

2. A wheel makes 7 rounds in 22 seconds ; what is its angular velocity ? If the diameter of the wheel is 4 ft., at what rate will it move ?

3. A wheel moves at 15 m.p.h. If its diameter is 5 ft., what is its angular velocity ?

4. A point on the rim of a wheel in motion makes 60° with its vertical diameter. If the velocity of the wheel is $10\sqrt{3}$ ft./sec., what is the space velocity (সমতল-পথে লব্ধিবেগ) of the point ?

5. At a particular instant, P, a point on the rim of a moving wheel, is equidistant from the centre and the highest point of the wheel. If the radius of the wheel is 2 ft., find the height of P from the ground at that instant.

6. The minute and the hour hands of a clock are respectively 5 ins. and 3 ins. long. What is the ratio of the speeds of their ends ?

7. The velocity of a point on the rim of a wheel is half that of its highest point. Find the height of the point from the ground, if the diameter of the wheel is 8 ft.

8. P, a point on the circumference of a wheel, is 4 ft. above the ground. The radius of the wheel is $4\frac{1}{2}$ ft. If the wheel moves with a velocity of 9 ft./sec., what is the space velocity of P ?

9. Drops of water are tangentially dirting off a circular disc of 6 ft. diameter. The disc is held in horizontal position by a pole passing through its centre. If the disc makes 21 revolutions in 22 seconds and if the centre of the disc is $7\frac{1}{3}$ ft. above the ground, find the locus of the drops of water on the ground.

10. The radii of the front and the hind wheels of a carriage are 'a' and 'b' and 'c' is the distance between the axle trees ; a particle of dust driven from the highest point of the hind-wheel is observed to alight on the highest point of the front-wheel. Show that the velocity of the crrriage is

$$\sqrt{\left\{\frac{(c+b-a)(c+a-b)}{4(b-a)}.g\right\}} \qquad \text{[U. P. B. 1955]}$$

[সংকেত : চাকা দুইটির কেন্দ্রের দূরত্ব c ; বড় চাকার মাথা হইতে ছোট চাকার মাথায় নামিতে t সময় লাগিলে, ধূলিকণাটির উল্লম্ব-সরণ $\frac{1}{2}gt^2 = 2(b-a)$ এবং অনুভূমিক সরণ $vt = \sqrt{c^2 - (b-a)^2}$; t অপনয়ন করিয়া v-র মান বাহির কর।]

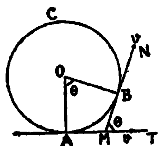
১৪১। বৃত্তপথে সমগতি-সম্পন্ন বস্তুকণার ত্বরণ (Acceleration of a particle in uniform circular motion) :

ইতিপূর্বে ১৩৮ অনুচ্ছেদের আলোচনায় দেখানো হইয়াছে যে, বৃত্তপথে সমগতি-সম্পন্ন বস্তুকণার উপর সংশ্লিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে একটি বল সক্রিয়

থাকে। উহা কেন্দ্রের দিকে যে ত্বরণ উৎপন্ন করে, তাহাকে **অভিলম্ব-ত্বরণ** (Normal acceleration) বলা হয়। পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা উহার মান নির্ণয় করিব।

১৪২। r-ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের পরিধি-পথে v সমদ্রুতিতে সঞ্চরমাণ বস্তুকণার উপর সক্রিয় অভিলম্ব-ত্বরণের মান $\frac{v^2}{r}$.

ABC বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং কেন্দ্র O। উহার পরিধি-পথে একটি বস্তুকণা v সমদ্রুতিতে সঞ্চরমান। কণাটি যখন A বিন্দুতে তখন AT স্পর্শক-রেখায় v বেগে, এবং t সময় পরে যখন উহা A-র অতি নিকটবর্তী B বিন্দুতে, তখন MN স্পর্শক-রেখায় v বেগে সক্রিয়। AT ও MN স্পর্শকদ্বয় যেন M বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। OA ব্যাসার্ধ AT-র উপর এবং OB ব্যাসার্ধ MN স্পর্শকের উপর লম্ব বলিয়া AOBM একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। কাজেই, বহিঃস্থ $\angle BMT =$ অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle AOB$। $\angle AOB = \theta$ ধরিলে, $\angle BMT = \theta$.



১৫৯নং চিত্র

এখন AT ও AT-র লম্ব-অভিমুখে AO-র দিকে B বিন্দুতে MN বরাবর সক্রিয় v বেগকে বিশ্লেষণ করিলে, যথাক্রমে v কস θ ও v সাইন θ পাওয়া যায়।

A বিন্দুতে বস্তুকণাটির AT-মুখেই v বেগ ছিল, AT-র লম্ব-অভিমুখে AO বরাবর উহার কোন বেগ ছিল না। B বিন্দুতে কিন্তু এই AO-মুখে উহার এখন v সাইন θ বেগ।

$\therefore$ AO-মুখে t সময়ে মোট বেগ-পরিবর্তন $= v$ সাইন θ।

$\therefore$ AO-মুখে ত্বরণ $= \frac{v \text{ সাইন } \theta}{t}$;

কিন্তু ত্রিকোণমিতির নিয়মে, বৃত্তীয় মানে θ অতি ক্ষুদ্র হইলে, সাইন $\theta = \theta$,

দ্বিতীয়তঃ, $\frac{\theta}{t} =$ কৌণিক বেগ $\omega = \frac{v}{r}$.

$$\text{AO-মুখে ত্বরণ} = v \cdot \frac{\theta}{t} = v\omega$$

$$= v \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}.$$

$\therefore$ **নির্ণেয় অভিলম্ব-ত্বরণ** $= \frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{r}}.$

অনুসিদ্ধান্ত : $v = \omega r$ বলিয়া,

অভিলম্ব-ত্বরণ $= \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 \mathbf{r}.$

১৪২˙১। **অভিলম্ব-বল :**

আমবা দেখিলাম, বৃত্তপথে সমগতি-সম্পন্ন বস্তুকণার উপর একটি অভিলম্ব-ত্বরণ সক্রিয় থাকে। কিন্তু বল ব্যতীত ত্বরণ উৎপন্ন হইতে পারে না। কাজেই, কণাটির উপর ত্বরণের অভিমুখে অর্থাৎ অভিলম্বদিকে একটা বল কাজ করে। উহাকেই **অভিলম্ব-বল** বলে।

অভিলম্ব-ত্বরণের মান জানিলে, আমরা অনায়াসেই ঐ ত্বরণ-উৎপাদনকারী অভিলম্ব-বলেরও মান নির্ণয় করিতে পারি। অভিলম্ব-ত্বরণ যদি $\frac{v^2}{r}$ হয়, তবে $P = mf$ সূত্রে f-এর স্থলে $\frac{v^2}{r}$ বসাইলে পাই $P = \frac{mv^2}{r}$.

$\therefore$ অভিলম্ব-বল $= \frac{mv^2}{r}$ বা $m\omega^2 r$. $\left[\because \frac{v^2}{r} = \omega^2\right]$

১৪৩। **অভিকেন্দ্র ও অপকেন্দ্র বল (Centripetal and centrifugal forces) :**

একগাছি সূতার ডগায় একটা ঢিল বাঁধিয়া ঘোরাইবার সময় হাতে একটা টান অনুভব করা যায়। এই টানের বিপরীত একটা টানই যে ঢিলটিকে সূতা বরাবর টানিয়া রাখিয়াছে তাহা সহজেই অনুমান করা যায়।

তাহা হইলে, এই উদাহরণের মধ্যে আমরা দুই-বিপরীতমুখী টান বা বলের সন্ধান পাই। সূতাগাছিকে ব্যাসার্ধ করিয়া ঢিলখানি বৃত্তপথে ঘুরিতেছে। সূতা বরাবর টান বা বল তাহাকে কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করিতেছে। এই বল

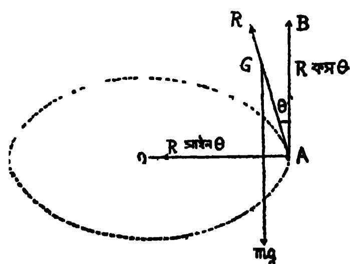
কেন্দ্রের অভিমুখে সক্রিয় বলিয়া **অভিকেন্দ্র** বা **কেন্দ্রাভিগ** (centripetal) বল নামে অভিহিত হয়। আর এই অভিকেন্দ্র বলের বিপরীত মুখে যে বল ঢিলখানিকে কেন্দ্র হইতে বিক্ষিপ্ত করিতে চায়, তাহার নাম **অপকেন্দ্র** বা **কেন্দ্রাতিগ** (Centrifugal) বল।

তাহা হইলে, **বৃত্তপথে সমগতি-সম্পন্ন বস্তুকণার উপর ঐ বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে যে বল সক্রিয় থাকে, তাহাকে অভিকেন্দ্র বা কেন্দ্রাভিগ বল বলে এবং এই বলের প্রতিক্রিয়াকে বলে অপকেন্দ্র বা কেন্দ্রাতিগ বল।**

১৪৪। কয়েকটি বিশেষ উদাহরণ :

(ক) বৃত্তপথে দ্বিচক্রযানের সমগতি (Uniform circular motion of a cycle) :

A হইতে বৃত্তপথে যেন একটি দ্বিচক্রযান সমদ্রুতিতে ধাবমান। ঐ দ্বিচক্রযান ও উহার চালকের সমবেত ভারকেন্দ্র যেন G বিন্দুতে অবস্থিত। বৃত্তপথে ঘুরিবার সময় গাড়ীসহ চালক বৃত্তের ভিতরদিকে একটু হেলিয়া থাকে। মনে কর, AB উল্লম্বরেখার সহিত θ কোণে গাড়ীসহ চালক AG বরাবর হেলিয়া গিয়াছে। AG রেখা, চালকসহ গাড়ীর অক্ষস্বরূপ। উহা A বিন্দুতে ভূতল স্পর্শ করিয়াছে। এখন AG-গামী একটি উল্লম্ব-তল কল্পনা করা যায়। ঐ উল্লম্ব-তলে কোন কৌণিক বেগ নাই। অনুভূমিক ভূতলে মাত্র বৃত্তপথের কেন্দ্রের চারিদিকে কৌণিক বেগ আছে। কাজেই AG-গামী উল্লম্ব-তলে G বিন্দুর চারিদিকে সক্রিয় বলগুলির



১৬০নং চিত্র

ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি নিশ্চয় শূন্য। কিন্তু ঐ তলে চালকসহ গাড়ীর ভার ও A বিন্দুতে মাটির প্রতিক্রিয়া—এই দুইটিমাত্র বল কাজ করে। উহাদের উভয়েই

G-বিন্দুগামী হইলেই উল্লিখিত ভ্রামকের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে। অতএব, A বিন্দুস্থিত মাটির প্রতিক্রিয়া AG-বরাবর G-বিন্দুগামী ;

এখন R-কে উল্লম্ব AB এবং অনুভূমিক AO বরাবর বিশ্লেষণ করিলে, যথাক্রমে R কস θ ও R সাইন θ বিশ্লেষিতাংশ পাওয়া যায়। চালকসহ গাড়ীর ভর m হইলে, উহার ভার mg। ঐ mg উল্লম্বভাবে নিচদিকে সক্রিয় এবং প্রতিক্রিয়ার উল্লম্ব বিশ্লেষিতাংশের সমান। অর্থাৎ

$$\text{R কস } \theta = mg \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

স্পষ্টতই, প্রতিক্রিয়ার অপর অর্থাৎ অনুভূমিক বিশ্লেষিতাংশ, R সাইন θ গাড়ীটির উপর অভিলম্ব-ত্বরণ উৎপন্ন করিতেছে। গাড়ীর সমদ্রুতি v এবং উহার বৃত্তপথের ব্যাসার্ধ r হইলে, এই ত্বরণ $=\frac{v^2}{r}$ এবং এই ত্বরণের উৎপাদক অভিলম্ব-বল $=\frac{mv^2}{r}$

$$\text{R সাইন } \theta = \frac{mv^2}{r} \qquad (2)$$

(2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\text{ট্যান } \theta = \frac{v^2}{gr};$$

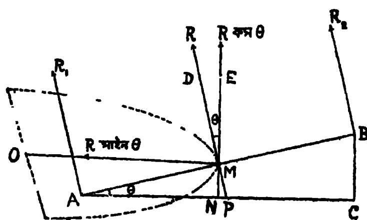
$$\therefore \quad \theta = \text{ট্যান}^{-1}\frac{v^2}{gr}.$$

অতএব, r-ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তপথে v সমদ্রুতিতে চলমান দ্বিচক্রযানের চালক, তাহার গাড়ীসহ, বৃত্তের অভ্যন্তরের দিকে ট্যান$^{-1}$ $\frac{v^2}{gr}$ কোণে হেলিয়া থাকে।

(খ) রেলপথের বাঁকে ঘুরিবার সময় রেলগাড়ীর গতি (The motion of a railway carriage while negotiating a curve) :

আমরা জানি রেলগাড়ীর প্রত্যেকটি চাকায় দুইটি বলয়—একটি রেলের উপর গড়াইয়া চলে, অপরটি ভিতরদিকে রেলের গায়ে ঘেঁষিয়া একটু নিচে নামিয়া থাকে। চাকার এই অংশটি থাকায় গাড়ী ছিটকাইয়া লাইনের বাহিরে যাইতে পারে না। রেল দুইটি যদি লাইনের বাঁকে সমান উঁচু হয়, তবে

মোড় ফিরিবার সময় গাড়ীর চাকা বাহিরের দিকে প্রচণ্ড চাপ দেয়। এই চাপের প্রতিক্রিয়া একটা অভিকেন্দ্র-বল। উহার ক্রিয়াতেই গাড়ী বৃত্তপথে মোড় ফিরে। রেল দুইটি সমান উঁচু থাকিলে লাইনের উপর এই চাপ ও উহার প্রতিক্রিয়া-জনিত প্রচণ্ড ঘর্ষণ গাড়ীর চাকাগুলিকে অচিরেই ক্ষয় করিয়া দিত। যাহাতে তাহা না হয়, সেইজন্য বাঁকের মুখে বাহিরের রেলখানিকে একটু উঁচু করিয়া পাতা হয়। বাঁকের মুখে এমনভাবে পাতা



১৬১নং চিত্র

একজোড়া রেলের উপর দুইটি বিন্দু যেন A ও B। AC ভূমিতলের সহিত AB রেখা θ কোণে নত। একটা গাড়ীর দুইটি চাকা যদি A ও B বিন্দুতে অবস্থিত হয়, তবে A ও B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R_1 ও R_2। উহারা AB-র লম্বদিকে সক্রিয় বলিযা সমান্তরাল। সুতরাং, উহাদের লব্ধি R_1+R_2। ধরা যাক, $R_1+R_2=R$। এই সমবেত প্রতিক্রিয়া AB-র উপর যেন M বিন্দুতে, MD বরাবর সক্রিয়। MD-র বর্ধিতাংশ এবং EM উল্লম্বরেখা AC-কে যথাক্রমে P ও N বিন্দুতে ছেদ করে। MO যেন অনুভূমিক রেখা।

স্পষ্টতই, $\theta = \angle$AMN-এর পূরক $= \angle$EMB-এর পূরক $= \angle$DME।

কাজেই, $\angle DMO = 90° - \theta$.

∴ R এর উল্লম্ব ও অনুভূমিক বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে, R সাইন $(90° - \theta)$ ও R কস $(90° - \theta)$ অর্থাৎ R কস θ ও R সাইন θ।

এখন গাড়ীখানির ভর m, সমদ্রুতি v এবং উহার বৃত্তপথের ব্যাস r হইলে,

উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া = গাড়ীর ভার

অর্থাৎ R কস $\theta = mg$ ... ... (1)

এবং অনুভূমিক প্রতিক্রিয়া =

R সাইন $\theta = \frac{mv^2}{r}$. (2)

∴ (2)-কে (1) দিয়া ভাগ করিলে,

$$\text{ট্যান } \theta = \frac{v^2}{gr}.$$

∴ **অনুভূমিক তলের সহিত উঁচু রেলের নতি-কোণ**

$$\theta = \text{ট্যান}^{-1} \frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{gr}}.$$

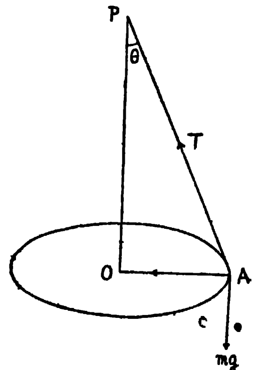
আবাব, দুই রেলের মধ্যবর্তী দূবত্ব d এবং নিচুটি হইতে উঁচু রেলটির উচ্চতা h হইলে, ট্যান $\theta = \frac{h}{d}$, অথবা $h = d$ ট্যান θ,

$$\text{অথবা } \mathbf{h} = \frac{\mathbf{v^2d}}{\mathbf{gr}}.$$

(গ) শঙ্কু-দোলক (Conical Pendulum) ঃ

একটি সূতাব এক মাথা একটি স্থিরবিন্দুতে ধারণ করিয়া, আরেক মাথায় বাঁধা একটি ভাবী বস্তুকণাকে ঘুবাইলে, যদি অনুভূমিক তলে ঐ কণা একটি বৃত্ত চিহ্নিত করে, তবে একটি শঙ্কু-দোলকের সৃষ্টি হয। যে স্থিরবিন্দুতে সূতাটি ধৃত, সেই বিন্দু হইতে অনুভূমিক তলেব উপব উল্লম্ববেখা উহার অক্ষ।

একগাছা সূতাব এক মাথা যেন P বিন্দুতে ধৃত এবং আরেক মাথা A বিন্দুতে বাঁধা একটি ভারী বস্তুকণা v সমদ্রুতিতে অনুভূমিক তলে বৃত্তপথে সঞ্চবমাণ। বস্তুকণাটিব ভর m, বৃত্তপথেব কেন্দ্র O ; সূতার দৈর্ঘ্য ও টান যথাক্রমে l ও T ; উল্লম্বরেখাব সহিত সূতাগাছির কোণ θ , এবং OP উচ্চতা যেন h।



১৩২নং চিত্র

স্পষ্টতই, অনুভূমিক তলে বৃত্তপথেব ব্যাসার্ধ
$= \text{AO} = \text{AP}$ সাইন θ
বা l সাইন θ।

∴ A বিন্দুর কৌণিক বেগ ω হইলে,

A বিন্দুর অভিলম্ব-ত্বরণ $= \omega^2 r$
$= \omega^2 l$ সাইন θ

এবং অভিলম্ব-বল $= m\omega^2 l$ সাইন θ।

এখন, T টানের উল্লম্ব ও অনুভূমিক বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে T কস θ ও T সাইন θ।

স্পষ্টতই, T কস $\theta = mg$ ... ... (1)

এবং T সাইন $\theta = m\omega^2 l$ সাইন θ,

বা, $T = m\omega^2 l.$ ... ... (2)

$\therefore$ (1)-এর T-র মান বসাইয়া,

$$\text{কস } \theta = \frac{mg}{T} = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

$$\therefore \quad \theta = \text{কস}^{-1} \frac{g}{\omega^2 l}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (3$$

আবার, T কস $\theta = mg$; বা, $m\omega^2 l$ কস $\theta = mg$.

$$\therefore \quad \omega^2 = \frac{g}{l \text{ কস } \theta} = \frac{g}{h} \quad [\because h = l \text{ কস } \theta]$$

$$\therefore \quad w = \sqrt{g/h}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

আবার, A বিন্দুর কৌণিক বেগ ω বলিয়া বৃত্তপথে একপাক ঘুরিতে উহার $\frac{2\pi}{\omega}$ বা $2\pi\sqrt{h/g}$ সময় লাগে। ... ... (5)

উদাহরণ (১) A mass of 3 lbs. is tied to one end of a light string, the other end of which is attached to a fixed point on a smooth horizontal table. The string is 6 ft. long and the mass is moving in a circle at 4 ft./sec. when the string is taut. Find the normal acceleration of the mass and the tension of the string.

প্রশ্নানুসারে, ভর $m = 3$ পাউণ্ড,

বৃত্তপথের ব্যাসার্ধ $r = 6$ ফুট, বৃত্তপথে সমদ্রুতি $v = 4$ ফু./সে.।

$\therefore$ অভিলম্ব-ত্বরণ $= \frac{v^2}{r}$ সূত্রানুসারে,

এখানে অভিলম্ব-ত্বরণ $= \frac{4 \times \not{4}^{\,2}}{\not{6}_{\,3}}$ বা $2\frac{2}{3}$ ফু./সে^{2}।

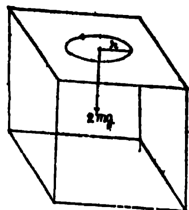
আবার, সূতার টান = অভিলম্ব-বল

$$= m\frac{v^2}{r} = \not{3} \times \frac{4 \times \not{4}^{\,2}}{\not{6}_{\,\not{2}}},$$

বা 8 পাউণ্ড্যাল।

উদাহরণ (২) A heavy particle of mass m is moving on a smooth table in a circle of radius r, being connected by a string, which passes through a hole in the table at the centre of the circle, with a particle of mass $2m$ which hangs vertically at rest. What must be the velocity of the first particle ?
[C. U. I. Sc. 1940]

নির্ণেয় সমক্রতি যেন v। প্রশ্নানুসারে সুতার টান এখানে অভিলম্ব-বলের সমান। আবার উহার নিচদিকে ঝুলন্ত $2m$ ভরের টানের সমান।



১৬৩নং চিত্র

$\therefore$ অভিলম্ব-বল $= 2mg,$

বা, $\frac{mv^2}{r} = 2mg.$

$v^2 = 2gr.$

$v = \sqrt{2gr}.$

উদাহরণ (৩) A mass of 4 lbs. is tied to one end of a light string 8 ft. long. The other end of the string being fixed at a point, the mass moves round that point in a circle. If the string can stand a maximum strain of 16 lbs., find how many rounds the mass can go in 11 seconds without breaking the string.

প্রশ্নানুসারে এখানে অভিলম্ব-বলের গরিষ্ঠ মান $= 16g$ পাউণ্ড্যাল এখন গরিষ্ঠ অভিলম্ব-বলের বেলায় সমক্রতি যদি v হয়, তবে

অভিলম্ব-বল $= \frac{mv^2}{\cdot} \quad \frac{\frac{-}{8}}{2} v^2$

$\therefore \frac{v^2}{2} = 16 \times 32$ অথবা $v^2 = (4 \times 8)^2$ বা $v = 32$ ফু./সে.।

$\therefore$ ভরটির কৌণিক বেগ $\omega = \frac{v}{r} = \frac{32}{8}$ বা 4 রেডিয়ান।

$\therefore$ এই কৌণিক বেগে ভরটি একপাক খাইবে $\frac{2\pi}{4}$ বা $\frac{2 \times 22}{7 \times 4}$ বা $\frac{11}{7}$ সে.।

$\therefore$ $\frac{11}{7}$ সেকেণ্ডে 1 পাক খাইলে,

11 সেকেণ্ডে $\frac{7}{11} \times 11$ বা 7 পাক খাইবে।

উদাহরণ (৪) A horizontal circular disc 5 ft. in diameter is rotating round a vertical axis through its centre at a speed of 25 revolutions per minute. A block of wood is placed on the disc which rotates with it. If the coefficient of friction between the block and the disc be ·3, find the greatest distance from the centre of the disc at which it can be placed so as to remain on the disc. [Madras University, 1926]

চাকতির ভর m এবং উহার কেন্দ্র হইতে কাঠের সর্বাধিক দূরত্ব যেন r ফুট। চাকতিটি মিনিটে বা 60 সেকেণ্ডে 25 পাক অর্থাৎ $25 \times 2\pi$ রেডিয়ান ঘোরে।

$\therefore$ উহা সেকেণ্ডে $\frac{25 \times 2\pi}{60}$ বা $\frac{5\pi}{6}$ রেডিয়ান ঘোরে।

$\therefore$ উহার কৌণিক বেগ $\omega = \frac{5\pi}{6}$ রেডিয়ান/সেকেণ্ড।

এখন চাকতির উপর স্থাপিত কাঠখানির উপর দুইটি বল সক্রিয়। একটি অভিলম্ব-বল এবং অপরটি গতীয় ঘর্ষণের বল। উহারা পরস্পরের বিপরীতমুখী ও সমান হইলেই সাম্যাবস্থা সম্ভব।

এক্ষেত্রে, অভিলম্ব-বল $= m\omega^2 r = m\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 r.$

দ্বিতীয়ত, গতীয় ঘর্ষণজ বল = ঘর্ষণাঙ্ক × অভিলম্ব-প্রতিক্রিয়া

$$= \cdot 3 \times mg = \tfrac{3}{10}\, mg.$$

$$\therefore \quad m\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 r = \frac{3}{10}\, mg,$$

$$\text{বা,} \quad \left(\frac{5 \times 22}{6 \times 2}\right)^2 r = \frac{3}{10} \times 32.$$

$$\therefore \quad r = \frac{3 \times 32}{10} \times \frac{6^2 \times 7^2}{5^2 \times 22^2} \text{ ফুট}$$

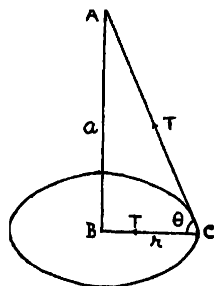
$$= \frac{3 \times 32 \times \overset{3}{\cancel{6}} \times \overset{3}{\cancel{6}} \times 7 \times 7}{10 \times 5 \times 5 \times \underset{11}{\cancel{22}} \times \underset{11}{\cancel{22}}} \text{ ফুট}$$

$$= \frac{42336}{3025 \times 10} \text{ বা } \frac{4233{\cdot}6}{3025} \text{ বা } 1{\cdot}4 \text{ ফুট (প্রায়)।}$$

উদাহরণ (৫) A string whose length is l passes through a heavy ring and has its two ends attached to two points, distant 'a' apart in the same vertical line. Show that when the ring rotates in a horizontal circle, the portion of the string between the ring and the lower point of support will be horizontal if the angular velocity ω is given by $\omega^2 = 2g \cdot \frac{l^2}{a(l^2 - a^2)}$.

[C. U. 1944 ; Gauhati U. 1948]

ধরা যাক, উল্লম্বরেখা AB-র A ও B বিন্দুতে দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা এবং দড়ির C বিন্দুতে বলয়টি আটকানো। ACB কোণের মান যেন θ।



১৬৪নং চিত্র

প্রশ্নানুসারে, $AB = a$, $BC = r$, $AC = l - r$।

দড়ির নিম্নপ্রান্ত B হইতে বলয় C পর্যন্ত অংশটি অনুভূমিক হইলে বলয়টির কৌণিক বেগ যেন ω হয়। এখন দড়ির টান T ও বলয়ের ভর m হইলে, CA বরাবর সক্রিয় T টানের উল্লম্ব বিশ্লেষিতাংশ $= T$ সাইন θ।

স্পষ্টতই এই উল্লম্ব বল = বলয়টির ভার,

অর্থাৎ T সাইন $\theta = mg$,

বা, $T \times \frac{a}{l-r} = mg$,

অর্থাৎ $T = \frac{mg(l-r)}{a}$ ... ... (1)

আবার, অনুভূমিক রেখায় CB বরাবর সক্রিয় T টান এবং CA বরাবর সক্রিয় টানের অনুভূমিক বিশ্লেষিতাংশ বা T কস θ একই দিকে সক্রিয়।
∴ এই দুই বলের সমষ্টি নিশ্চয় বলয়টির উপর সক্রিয় অভিকেন্দ্র-বলের সমান।

∴ $T + T$ কস $\theta = m\omega^2 r$,

বা, $T(1 +$ কস $\theta) = m\omega^2 r$.

T-র মান বসাইয়া,

$\frac{mg(l-r)}{a}\left(1 + \frac{r}{l-r}\right) = m\omega^2 r.$

$$\text{বা, } \frac{gl}{a} = \omega^2 r \quad \text{অর্থাৎ} \quad \omega^2 = \frac{gl}{ar}. \qquad \cdots \quad (2)$$

কিন্তু ABC ত্রিভুজ সমকোণী বলিয়া,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

$$\text{বা, } (l-r)^2 = a^2 + r^2, \quad \text{বা, } l^2 + r^2 - 2lr = a^2 + r^2,$$

$$\text{বা, } r = \frac{l^2 - a^2}{2l}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

∴ (3) হইতে প্রাপ্ত r-এর মান (2)-এ বসাইয়া,

$$\omega^2 = \frac{gl}{\frac{a.(l^2 - a^2)}{2l}} = 2g \cdot \frac{}{a(l^2 - a^2)}.$$

উদাহরণ (৬) A bicyclist is moving round a curve of radius 64 ft. at $7\frac{3}{11}$ m.p.h. At what angle must he incline his body along with the bicycle to the vertical for maintaining balance ?

$$7\frac{3}{11} \text{ m.p.h.} = \frac{80 \times 1760 \times 3}{11 \times 3600} \text{ বা } \frac{32}{3} \text{ ফু./সে.।}$$

আমরা জানি যে, এইরূপ ক্ষেত্রে ভূমির প্রতিক্রিয়া R সাইকেলসহ চালকের ভারকেন্দ্রগামী। কাজেই উল্লম্বরেখার সহিত লোকটির নতিকোণ θ হইলে, ঐ রেখার (অর্থাৎ উল্লম্বরেখার) সহিত R-এর নতিকোণও θ-ই হইবে।

উল্লম্ব ও অনুভূমিক দিকে R-এর বিশ্লেষিতাংশ লইলে,

$$R \text{ কস } \theta = mg \quad \text{এবং} \quad R \text{ সাইন } \theta = \text{অভিলম্ব-বল}$$

$$= \frac{m(\frac{32}{3})^2}{64} = \frac{m \times 32 \times 32}{6 \times 64}.$$

$$\frac{R \text{ সাইন } \theta}{R \text{ কস } \theta} = \text{ট্যান } \theta = \frac{m \times 32 \times 32}{9 \times 64 \times mg} = \frac{32 \times 32}{9 \times 64 \times 32} = \frac{1}{18}.$$

$$\therefore \quad \theta = \text{ট্যান}^{-1} \frac{1}{18}.$$

উদাহরণ (৭) A train is travelling at the rate of 40 miles per hour on a curve the radius of which is a quarter of a mile.

If the distance between the rails be 5 ft., find how much the outer rail must be raised above the inner, so that there may be no lateral pressure (পার্শ্বচাপ) on the rails.

[Annamalai University B. A. 1931]

দুই রেলের সমবেত প্রতিক্রিয়া R, অনুভূমিক রেখার সহিত বাহিরের রেলের নতিকোণ θ, ভিতরেরটির তুলনায় বাহিরের রেলের উচ্চতা h ফুট, এবং রেলগাড়ীর ভর যেন m ।

এখন, 40 মাইল/ঘণ্টা $= \frac{40\times 1760\times 3}{3600}$ বা $\frac{176}{3}$ ফু./সে. ।

প্রতিক্রিয়া R-এর অভিলম্ব বিশ্লেষিতাংশ = R কস θ এবং অনুভূমিক বিশ্লেষিতাংশ R সাইন θ ।

অভিলম্ব-বল $= \frac{mv^2}{r}$ সূত্রানুসারে, এখানে,

$$R \text{ সাইন } \theta = \frac{m\left(\frac{176}{3}\right)^2}{\frac{1}{4}\times 1760\times 3} \text{ বা } \frac{m\times 176\times 176}{9\times 440\times 3}$$

$$\text{বা, } \frac{m\times 2\times 176}{3\times 5\times 9};$$

$$\text{ট্যান } \theta \quad \frac{2\times 176}{3\times 5\times 9\times 32} = \frac{11}{3\times 5\times 9}$$

$$h = 5 \text{ ট্যান } \theta = 5\times\frac{11}{3\times 5\times 9} \text{ বা } \frac{11}{27} \text{ ফুট}$$

বা $4\frac{8}{9}$ ইঞ্চি

অনুশীলনী ২৬

1. A particle is tied to one end of a light string 8 ft. long, the other end of which is fixed to a point on a smooth horizontal surface. If a normal acceleration of 2 ft./sec^2 imparted to the particle makes it go uniformly round a circle with the fixed point as its centre, find the speed of the particle and the normal force producing the acceleration, if the mass of the particle is 4 lbs.

2. If a planet of mass m, move in a circle of radius r with a velocity v about the sun as the centre, find the attractive force of the sun on the planet. [C. U. 1928]

3. A mass of 10 lbs. connected by a 12 ft. long, light inelastic string to a fixed point on a smooth horizontal surface, makes 7 rounds in 22 seconds about the fixed point when the string is taut. Find the tension of the string in lbs.-wt.

4. A particle moves in a horizontal circle of radius 35 cm. under the action of a force directed to the centre and equal to 400 dynes. Find the mass of the particle, if its speed is 20 cm. per sec. Find also its angular velocity. [H. S. B. S. E. 1961]

5. A particle of mass 5 lbs. moves with a velocity 6 ft./sec. on a smooth horizontal table, being attached to a fixed point on the table by a string of length 10 ft. Find the tension of the string. [H. S. B. S. E. 1960]

6. A particle of mass 8 lbs., resting on a smooth table, and attached to a fixed point on the table by a string 4 ft. long is making 300 revolutions per minute. Find the tension in the string. [H. S. B. S. E. 1962]

7. A particle of mass 15 lbs. connected with a fixed point on a smooth horizontal plane by a string of length 9 ft. moves uniformly in a circle on the plane with a velocity of 6 ft. per second. Find the tension of the string. [C. U. 1936]

8. A particle moves in a horizontal circle of radius 35 cm. under the action of a force directed to the centre and equal to 2400 dynes. Find the mass of the particle if its speed is 20 cm. per second. Find also its angular velocity. [C. U. 1916]

9. Two masses, one three times the other, are tied to the ends of a string passing through a hole on a smooth horizontal

plane. The heavier mass hangs vertically and is at rest while the lighter one moves uniformly in a circle about the hole at a constant distance of 6 ft. Find the speed of the smaller mass.

10. Two masses P and Q are joined by a light inextensible string. The mass P describes a circle of radius 15 ft., on a smooth horizontal table with a uniform speed, while Q is suspended vertically in equilibrium by the string which passes through a small hole in the table at the centre of the circle described by P. If the masses of P and Q are 9·6 lbs. and 12·5 lbs. respectively, find the speed of P. [C. U. 1934]

11. A (horizontal) string which would break under a tension of 4 lbs.-wt., is used to swing a weight of 1 lb. horizontally in a circle of radius 3 ft. What is the greatest speed which the weight can have without breaking the string ? [C. U. 1952]

12. A string can just stand a strain produced by a tension equal to 484 gms.-wt. A mass of 981 gms. is tied to one end of the string and describes a horizontal circle about the other end, the string remaining tight. If the length of the string be 36 cms., what is the maximum number of revolutions per min. that can be made by the string without breaking ? [C. U. 1956]

13. A horizontal circular disc is rotating round its vertical axis through the centre at 15 revolutions per min. A rough mass of wood is placed on it at a distance of 7 ft. from the axis. If the mass rotate with the disc without slipping, find the coefficient of friction between the disc and the mass.

14. A body is placed on a circular table at a distance of 3 ft. from the centre. The table is rotated about a vertical axis through the centre with gradually increasing velocity, what would be the angular velocity when the body begins to slip, if $\mu = \cdot 6$? [Madras University, 1922]

15. A particle of mass 12 oz. tied to the end of a fine string, 5 ft. long, moves in a horizontal circle of radius 3 ft. round the vertical pole through the centre, the other end of the string being attached to the pole above the centre of the circle of motion. Find the angular velocity of the particle and the tension of the string.

16. A particle attached by means of two equal strings to two fixed points A and B in the same vertical line, describes

a horizontal circle with uniform angular velocity. Show that in order that both the strings may be stretched, the angular velocity must be $> \sqrt{2g/h}$ where $AB = h$. Show also that if the angular velocity $= 2\sqrt{2g/h}$, the ratio of the tensions of the strings is as 5 : 3. [Andhra University B. A. 1938]

[সংকেত : বস্তুকণাটি হইতে অঙ্কিত অনুভূমিক রেখা AB উল্লম্বরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অনুভূমিক তল হইতে A-র উচ্চতা $\frac{h}{2}$ । যতক্ষণ শুধু উপরের দড়িটিতে টান আছে ততক্ষণ কণাটি শঙ্কু-দোলকের মতো ঘুরিবে এবং তখন কৌণিক বেগ $\omega = \sqrt{\frac{g}{\text{উচ্চতা}}} = \sqrt{g/\frac{h}{2}} = \sqrt{2g/h}$ ।

∴ যখন এই কৌণিক বেগ $> \sqrt{2g/h}$ তখনই নিচের দড়িতে টান পড়িবে। দ্বিতীয়ত, উপরে দড়ি যদি অনুভূমিক রেখার সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে, তবে দেখাও নিচের দড়িও ঐ রেখার সহিত θ কোণে নত। উপরের ও নিচের দড়ির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 হইলে,

T_1 সাইন $\theta + T_2$ সাইন $\theta = mg$ এবং T_1 কস $\theta - T_2$ কস $\theta = m\omega^2 r$; ইত্যাদি।]

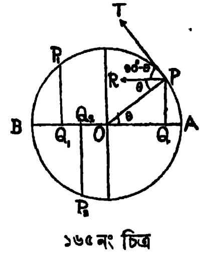
17. At what angle must a cyclist incline his machine to the vertical so that he may keep himself on to a circular path of radius 121 ft. when running at a uniform speed of 7·5 miles per hour ? [C. U. 1942, '50]

18. A railway carriage is moving in a circular path of radius 400 yds. with a speed of 30 miles per hour. If the distance between the rails be 6 ft., by how much must the outer rail be higher than the inner rail, so that the carriage may just be not overturned ? [C. U. 1910]

১৪৪। সরল সমঞ্জস গতি (Simple Harmonic Motion) :

(ক) বৃত্তপথে যখন একটা বিন্দু সঞ্চরমাণ হয়, তখন ঐ বৃত্তের একটি ব্যাস বরাবর সঞ্চরমাণ বিন্দুটি হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুও সঞ্চরমাণ হয়। পাদ-বিন্দুটির এই গতির কয়েকটি উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য আছে। ইহার বিশদ আলোচনা করিয়া আমরা সরল সমঞ্জস গতি কাহাকে বলে তাহা বিচার করিব।

A হইতে একটি বিন্দু P যেন ω কৌণিক বেগে APP_1 BP_2 বৃত্তপথে সঞ্চরমাণ। P হইতে অঙ্কিত PQ রেখা AB ব্যাসের উপর লম্ব। এখন, A হইতে P বিন্দু যতক্ষণে বৃত্তপথে B বিন্দুতে আসিয়া পৌছায়, ততক্ষণে Q বিন্দুও A হইতে AB ব্যাস বরাবর B বিন্দুতে উপনীত হয়। আবার, B হইতে বৃত্তপথে চলিতে চলিতে P বিন্দু A বিন্দুতে ফিরিয়া আসে ; সঙ্গে সঙ্গে Q বিন্দুও B হইতে BA ব্যাস বরাবর A বিন্দুতে ফিরিয়া যায়। তাহা হইলে, P বিন্দুর বৃত্তপথে সমদ্রুতির সঙ্গে সঙ্গে Q বিন্দুর A হইতে B এবং B হইতে A পর্যন্ত যাতায়াত একপ্রকার দোলাচল গতির উদাহরণ।



১৬৫ নং চিত্র

এখন বৃত্তটির কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ r এবং $\angle AOP$ যদি θ হয়, তবে P-র সমদ্রুতি ωr এবং ত্বরণ $\omega^2 r$। P-র সমদ্রুতিকে AB-র সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ করিলে, ωr কস RPT বা ωr সাইন RPO বা ωr সাইন θ পাওয়া যায়। কাজেই, Q-র বেগ ωr সাইন θ।

দ্বিতীয়ত, P বিন্দুর অভিলম্ব-ত্বরণ $\omega^2 r$ PO-মুখে সক্রিয় PR বরাবর (AB-র সমান্তরাল দিকে) উহার বিশ্লেষিতাংশ $= \omega^2 r$ কস RPO $= \omega^2 r$ কস θ। কাজেই, Q-র ত্বরণও $\omega^2 r$ কস θ হইবে।

একটা বিশেষ ক্ষণে O বিন্দু হইতে Q-র দূরত্ব যদি x হয়, তবে স্পষ্টতই,

(i) **Q-বেগ** $= \omega r$ সাইন $\theta = \omega r.\dfrac{PQ}{r} = \omega PQ = \omega\sqrt{r^2 - x^2}$,

এবং (ii) **Q-র ত্বরণ** $= \omega^2 r$ কস $\theta = \omega^2 r.\dfrac{OQ}{r} = \omega^2.OQ = \omega^2 x$.

(i) হইতে সহজেই বুঝা যায়, O হইতে Q-দূরত্ব x যত কমে Q-র বেগ তত বাড়ে ; আর, x যত বাড়ে, Q-র বেগ ততই কমে। কাজেই, x যখন শূন্য, অর্থাৎ Q যখন O বিন্দুতে, তখন Q-র বেগ ωr এবং তাহাই Q-র সর্বাধিক বেগ। আবার, যখন $x = r$ অর্থাৎ Q যখন O হইতে r একক দূরে A বা B বিন্দুতে, তখন P-র বেগ শূন্য। অতএব, A হইতে O পর্যন্ত এবং B হইতে O পর্যন্ত

Q-র বেগ বাড়িয়া চলে। ইহা হইতে সিদ্ধান্ত এই হয় যে, Q-র ত্বরণের মুখ সর্বদা O-র দিকে নির্দিষ্ট।

(ii) হইতে দেখা যায়, Q বিন্দুর ত্বরণের মান একান্তভাবে O হইতে উহার (Q বিন্দুর) দূরত্ব x-এর মানের উপর নির্ভর করে। x বাড়িলে $\omega^2 x$ বাড়ে, x কমিলে $\omega^2 x$ কমে ;

তাহা হইলে, Q বিন্দুর গতি-সম্বন্ধে দুইটি বৈশিষ্ট্য ধরা পড়ে :

(১) উহার ত্বরণ সর্বদা একটি স্থিরবিন্দুর প্রতি উদ্দিষ্ট ; এবং (২) ঐ ত্বরণের মান উল্লিখিত স্থিরবিন্দু হইতে Q-র দূরত্বের সমানুপাতিক।

Q-এর ন্যায় কোন বিন্দুর যদি উল্লিখিত দুইটি বৈশিষ্ট্য-সম্পন্ন গতি থাকে, তবে সেই গতিকেই বলে সরল সমঞ্জস গতি। অতএব, সরল সমঞ্জস গতির নিম্নরূপ একটা সংজ্ঞা নির্দেশ করা যায়।

সংজ্ঞা : একটি সরলরেখায় সঞ্চরমাণ কোন বিন্দুর ত্বরণ যদি উক্ত রেখার উপরিস্থ কোন স্থিরবিন্দুর প্রতি সর্বদা উদ্দিষ্ট হয় এবং যে-কোন মুহূর্তে এই ত্বরণের মান যদি স্থিরবিন্দুটি হইতে সঞ্চরমাণ বিন্দুটির দূরত্বের সমানুপাতিক হয়, তবে প্রথমোক্ত সঞ্চরমাণ বিন্দুটির গতিকে **সরল সমঞ্জস গতি** বলে।

(খ) উপরের আলোচনা হইতে স্পষ্ট দেখা যায়, O বিন্দু Q বিন্দুর দোলন-কেন্দ্র (centre of oscillation)। Q বিন্দু সর্বদা A বিন্দু হইতে O বিন্দুতে, এবং B বিন্দু হইয়া আবার O বিন্দুতেই ফিরিয়া আসে। অর্থাৎ Q বিন্দু O বিন্দুর দুইপাশে একবার A পর্যন্ত এবং আরেকবার B পর্যন্ত দুলিতে থাকে। O হইতে A বা B পর্যন্ত দূরত্ব r-কে বলে **বিস্তার (amplitude)**।

দ্বিতীয়ত, বৃত্তপথে ω বেগে A হইতে B বিন্দু ঘুরিয়া আবার A বিন্দুতে ফিরিয়া আসিতে P বিন্দুর যদি T সময় লাগে, তবে

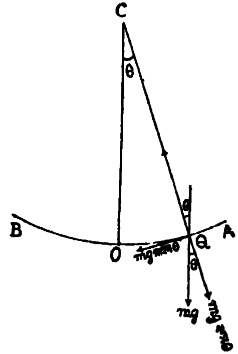
$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

স্পষ্টতই, A হইতে AOB রেখায় B পর্যন্ত গিয়া আবার A বিন্দুতে ফিরিয়া আসিতেও Q বিন্দুর একই সময় লাগিবে। সুতরাং, Q বিন্দুর একপাক পূর্ণ

দোলনের সময় T = · এই সময়কে বলে Q বিন্দুর **পর্যায়কাল (Periodic time)**।

১৪৪'১। সরল দোলক (Simple Pendulum)ঃ সরল সমঞ্জস গতির একটি সুবিদিত উদাহরণ হইল সরল দোলকের গতি।

C বিন্দু হইতে একটি দোলক যেন l একক দীর্ঘ অপ্রসার্য CQ রজ্জু দ্বারা ধৃত। CO উল্লম্বরেখা হইতে A-র দিকে সরিয়া অথবা A হইতে O-র দিকে অগ্রসর হইবার সময় দোলকটি যেন Q বিন্দুতে অবস্থিত হইয়াছে। এখন $\angle ACO = \theta$ এবং দোলকটির ভর m হইলে, নিচদিকে উল্লম্বরেখায় সক্রিয় mg ভারের CA বরাবর বিশ্লেষিতাংশ mg কস θ এবং Q বিন্দুতে CA-র লম্বদিকে বিশ্লেষিতাংশ mg সাইন θ।



১৬৬নং চিত্র

রজ্জুটির AC বরাবর টান mg কস θ-র সমান ও বিপরীত। বাকী mg সাইন θ বল দোলকের ত্বরণ উৎপন্ন করিতেছে।

এখন θ কোণ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হইলে সাইন $\theta = \theta$ $= \frac{OQ}{l}$ (বৃত্তীয় মান)।

দ্বিতীয়ত, এই ক্ষেত্রে AQOB চাপকে কার্যত একটি সরলরেখা বলিয়া ধরা যাইতে পারে। অতএব, O হইতে Q-এর দূরত্ব অর্থাৎ OQ যদি x হয়, তবে mg সাইন $\theta = mg\frac{x}{l} = \frac{mg}{l}\cdot x$। তাহা হইলে, Q-র উপর সক্রিয় বল তথা উহার ত্বরণ সর্বদা O-র দিকে উদ্দিষ্ট এবং ঐ ত্বরণ O হইতে Q-র দূরত্ব x-এর সমানুপাতিক, কারণ $\frac{mg}{l}$ এই ক্ষেত্রে ধ্রুবক। সুতরাং, সংজ্ঞা অনুসারে Q দোলকটির গতি সরল সমঞ্জস গতির পর্যায়ভুক্ত।

সরল দোলকের ন্যায় সেতার প্রভৃতি বাদ্যযন্ত্রের তারের ও স্বনক প্রভৃতির দোলনও সরল সমঞ্জস গতির উদাহরণ।

ঊনবিংশ পরিচ্ছেদ

পুনরালোচনা

১৪৫। $S = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্রের বিশ্লেষণমূলক প্রমাণ:

u প্রারম্ভিক বেগ ও f সমত্বরণসহ কোন বস্তুকণা যেন t সময়ে সরলরেখায় s দূরত্ব অতিক্রম করে এবং ঐ t সময়ের মাথায় উহার প্রান্তিক বেগ যেন v হয়।

t সময়কে n-সংখ্যক ভাগে বিভক্ত করিলে প্রত্যেক ভাগ $\frac{t}{n}$ -এর সমান হয়। এই n-সংখ্যক সময়-পর্বের পর পর প্রত্যেকটির আরম্ভে কণাটির বেগ যথাক্রমে,

$$u\ ;\quad u = f\frac{t}{n}\ ;\ u + \frac{2ft}{n}\ ;\ u + \frac{3ft}{n}\ ;\ \cdots\quad \cdots\ ;\ u + \frac{(n-1)ft}{n}.$$

এখন, যদি ধরা যায় যে, কণাটি এক-একটা সময়-পর্বে ঐ পর্বের প্রারম্ভিক বেগ-সহকারেই আগাগোড়া সমভাবে চলে, তবে t সময়ে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব যেন s_1 হয়। তাহা হইলে,

$$s_1 = n\cdot\frac{t}{n} + \left(u + \frac{ft}{n}\right)\frac{t}{n} + \left(u + \frac{2ft}{n}\right)\frac{t}{n} + \cdots + \left\{u + \frac{(n-1)ft}{n}\right\}\frac{t}{n}$$

$$= u\cdot\frac{t}{n} + u.\frac{t}{n} + \frac{ft^2}{n^2} + u\cdot\frac{t}{n} + \frac{2ft^2}{n^2} + \cdots + u\cdot\frac{t}{n} + \frac{(n-1)ft^2}{n}$$

$$= u\cdot\frac{t}{n}\cdot n + \frac{ft^2}{n^2}\,[\,1 + 2 + 3 + \cdots\cdots\cdots\ (n-1)\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}\,]$$

$$= ut + \frac{ft^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= ut + \tfrac{1}{2}ft^2.\frac{n-1}{n}$$

$$= ut + \tfrac{1}{2}ft^2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

আবার প্রথম হইতে n-তম পর্যন্ত প্রত্যেকটি সময়-পর্বের প্রান্তিক বেগসমূহ যথাক্রমে,

$$\left(u + f\frac{t}{n}\right)\ ;\quad \left(u + \frac{2ft}{n}\right)\ ;\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \left(u + \frac{nft}{n}\right)$$

যদি ধরা যায় যে, এক-একটা পর্বে কণাটি ঐ পর্বের প্রান্তিক বেগসহকারে আগাগোড়া সমহারে চলে, তবে t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব যেন s_2 হয়।

$$\therefore\quad s_2=\left(u+\frac{ft}{n}\right)\frac{t}{n}+\left(u+\frac{2ft}{n}\right)\frac{t}{n}+\cdots\cdots\ n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।}$$

$$=\frac{ut}{n}+\frac{ft^2}{n^2}+\frac{ut}{n}+\frac{2ft^2}{n^2}+\cdots\cdots\ n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।}$$

$$=\frac{ut}{n}\times n+\frac{ft^2}{n^2}\ (1+2+3+\cdots\cdots\ n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$$

$$=ut+\frac{ft^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=ut+\tfrac{1}{2}ft^2\cdot\frac{(n+1)}{n}$$

$$=ut+\tfrac{1}{2}ft^2\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

কিন্তু বলা বাহুল্য যে-কোন পর্বেই বস্তুকণাটি আগাগোড়া প্রারম্ভিক বা প্রান্তিক বেগে চলে না। কাজেই, নির্ণেয় s দূরত্ব s_1 অপেক্ষা কিছু বড় কিন্তু s_2 অপেক্ষা একটু ছোট। অর্থাৎ s দূরত্ব s_1 ও s_2 দূরত্বের মাঝামাঝি। n-এর যে-কোন মানের বেলায় একথা খাটে। কাজেই, n-এর মান যদি খুব বড় হয়, তবে $\frac{1}{n}$ এর মান অত্যন্ত ছোট হইয়া পড়ে এবং অন্তিমে $\frac{1}{n}$ এর মান প্রায় শূন্য হইয়া যায়। এখন s_1 ও s_2 উভয়ের মান উহাদের মধ্যবর্তী s-এর মানের সহিত এক হইয়া গিয়া দাঁড়ায় $ut+\frac{1}{2}ft^2$-এর সমান।

$$\therefore\quad \mathbf{s=ut+\tfrac{1}{2}ft^2}.$$

কঠিনতর প্রশ্নাবলী

(More Advanced Problems)

১৪৬। সরলরেখার গতি-সংক্রান্ত প্রশ্ন (Problems based or rectilinear motion):

এই পুস্তকের প্রথম খণ্ডের তৃতীয় পরিচ্ছেদে আমরা সরলরেখায় সমত্বরণসহ গতির আলোচনা করিয়াছি। কঠিনতর প্রশ্ন-সমাধানে আমরা পূর্ব-পরিচিত

সূত্রগুলিরই ব্যবহার করিব। কিন্তু ইহাদের প্রয়োগের ক্ষেত্রে বেশ একটু সাবধান হইতে হইবে। তাহা ছাড়া বীজগণিতের দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত রাশিমালা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলি নখদর্পণে রাখিতে হইবে।

প্রারম্ভিক বেগ u, সমত্বরণ f, প্রান্তিক বেগ v, সময় t এবং t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব s হইলে, আমরা জানি :

(1) $v = u + ft$;

(2) $s = \frac{1}{2}(u+v)t$;

(3) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$;

(4) $v^2 = u^2 + 2fs$;

(5) n-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব বা $s_n = u + \frac{1}{2}f(2n-1)$.

এইগুলির কোন একটি বা কয়েকটিকে প্রয়োগ করিয়া আমরা সরলরেখায় গতিসংক্রান্ত যে-কোন প্রশ্নের সমাধান করিতে পারিব। প্রয়োগের কৌশল সর্বত্র ঠিক বাঁধিয়া দেওয়া যায় না। প্রদত্ত উদাহরণগুলি যত্ন করিয়া দেখিলে ছাত্রগণ নিজেরাই এই কৌশল আয়ত্ত করিতে পারিবে।

উদাহরণ (১) A train travels from rest at one station to another (in the same straight line) distant d ft. It moves for first part of the distance with an acceleration of a ft. per sec^2 and for the remainder with a retardation of b ft. per sec^2. Show that it will accomplish the journey in

$$\sqrt{\left\{\frac{2(a+b)d}{ab}\right\}} \text{ secs.} \qquad [\text{ C. U. I. Sc. 1945 }]$$

d ফুট দূরত্বের প্রথম অংশ s_1 ও দ্বিতীয় অংশ s_2 ফুট এবং s_1 ফুট যাইতে t_1 সেকেণ্ড ও s_2 যাইতে যেন t_2 সেকেণ্ড লাগে। t_1 সেকেণ্ড পরে গাড়ীর বেগ যেন v ফু./সে. হয়। তাহা হইলে, প্রশ্নানুসারে

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(0+v)t_1 = \tfrac{1}{2}vt_1$$

এবং $$s_2 = \tfrac{1}{2}(v+0)t_2 = \tfrac{1}{2}vt_2.$$

$$\therefore \quad d = s_1 + s_2 = \tfrac{1}{2}vt_1 + \tfrac{1}{2}vt_2 = \tfrac{1}{2}v(t_1+t_2) = \tfrac{1}{2}vt$$

[$t = t_1 + t_2$ ধরিয়া]

অথবা, $\mathbf{t = \frac{2d}{v}}$. ... ... (i)

আবার, $v = at_1$ বা $\frac{v}{a} = t_1$,

এবং $v - bt_2 = 0$ বা $v = bt_2$ বা $\frac{v}{b} = t$

$$\therefore \quad t_1 + t_2 = \frac{v}{a} + \frac{v}{b} = \frac{v(a+b)}{ab}.$$

অর্থাৎ $\mathbf{t = \frac{v(a+b)}{ab}}$. (ii)

(i)-কে (ii) দ্বারা গুণ করিলে,

$$t^2 = \frac{2d}{v} \times \frac{v(a+b)}{ab} = \frac{2(a+b)d}{ab}$$

$$\mathbf{t = \sqrt{\frac{2(a+b)d}{ab}}} \text{ সেকেণ্ড।}$$

উদাহরণ (২) A particle moving in a straight line with uniform acceleration, passes in succession through the points A, B, C. The time taken from A to B is t_1 and from B to C is t_2 ; AB $= a$, BC $= b$. Prove that the acceleration of the particle is

$$\frac{2(bt_1 - at_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}.$$ [W. B. H. S. 1960]

কণাটির t_1 ও t_2 সেকেণ্ডের মাথায় বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2 হইলে, প্রশ্নানুসারে A হইতে যাত্রাব পব B বিন্দুতে প্রান্তিক বেগ v_1 এবং B হইতে যাত্রার সময় প্রারম্ভিক বেগ v_1 এবং C বিন্দুতে প্রান্তিক বেগ v_2।

$\therefore \quad v = ft_1$ এবং $v_2 = v_1 + ft_2$,

অর্থাৎ $v_2 = ft_1 + ft_2 = f(t_1 + t_2)$. (i)

আবার, $a = \frac{1}{2}(0 + v_1)t_1 = \frac{1}{2}v_1 t_1$,

বা, $\frac{2a}{t_1} = v_1$ ... (ii)

এবং $b = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t_2$

বা, $\frac{2b}{t_2} = v_1 + v_2$. ... (iii)

(iii) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{2b}{t_2}-\frac{2a}{t_1}=v_2.$$

(i)-এ v_2-র মান বসাইয়া,

$$\frac{2(bt_1-at_1)}{t_1t_2}=f(t_1+t_2),$$

বা, $$f=\frac{2(bt_1-at_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}.$$

উদাহরণ (৩) A particle moving at f ft/sec² is d ft. ahead of another particle moving at u ft/sec. Find the condition that they may meet (i) only once, (ii) twice, and (iii) that they may never meet.

t সেকেণ্ড পরে কণা দুইটি মিলিত হইলে, ঐ t সময়ে পিছনেরটি সামনেরটির চেয়ে d ফুট বেশী যাইবে।

t সময়ে f ত্বরণসহ সামনেরটি যাইবে $\frac{1}{2}ft^2$ ফুট; কাজেই পিছনেরটি যাইবে $\frac{1}{2}ft^2+d$ ফুট।

$\therefore\quad ut=\frac{1}{2}ft^2+d,$

বা, $\frac{1}{2}ft^2-ut+d=0,$

বা, $t=\dfrac{u\pm\sqrt{u^2-2fd}}{f}.$

(i) স্পষ্টতই, $u^2-2fd=0$ অর্থাৎ $u^2=2fd$ হইলে, t-র একটি মান $\frac{u}{f}$ পাওয়া যায়। কাজেই, সেক্ষেত্রে কণা দুইটি একবার মাত্র মিলিত হইবে।

(ii) দ্বিতীয়ত, $u^2>2fd$ হইলে, u^2-2fd ধনাত্মক হইবে। সেক্ষেত্রে t-র দুইটি ধনাত্মক মান পাওয়া যাইবে। t-র ঋণাত্মক মানের কোন অর্থ হয় না। কাজেই, দুইবার মিলিত হইবার শর্ত

$$u^2>2fd.$$

(iii) $u^2<2fd$ হইলে, t-র মান অবাস্তব হইয়া পড়ে। অর্থাৎ এমন কোন বাস্তব সময় পাওয়া যায় না যখন কণা দুইটি মিলিত হয়। অতএব,

$u<2fd$ হইলে, কণা দুইটি কখনও মিলিত হইবে না।

উদাহরণ (৪) Two particles move from the same point A along the same line AB, one with uniform velocity u, and the other with uniform acceleration f and no initial velocity. Find when the second overtakes the first, and show that the greatest distance between the particles is $\frac{u^2}{2f}$ at the end of time $\frac{u}{f}$ from the start. [P. U. 1941 ; B. H. U. 1945]

কণা দুইটির মধ্যে গরিষ্ঠ দূরত্ব যেন d এবং t সেকেণ্ডের পর যেন উহাদের মধ্যে এই গরিষ্ঠ দূরত্ব হয়। তাহা হইলে,

t সময়ে সমবেগে ধাবমান কণা যায় ut ফুট,

এবং সমত্বরণে ধাবমান কণা যায় $\frac{1}{2}ft$ ফুট।

এই দুই দূরত্বের অন্তর d ফুট।

$\therefore \quad ut - \frac{1}{2}ft^2 = d,$

বা $\quad \frac{1}{2}ft^2 - ut + d = 0.$

$$t = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2fd}}{f}.$$

(i) t-র মান বাস্তব বলিয়া, $u^2 - 2fd$ হয় শূন্য, নয় ধনাত্মক।

অর্থাৎ $u^2 \geqslant 2fd$

বা $\frac{u^2}{2f} \geqslant d$

অথবা $d \leqslant \frac{u^2}{2f}.$

$\therefore$ d-এর গরিষ্ঠ মান $= \frac{u^2}{2f}.$

(ii) d-র মান $= \frac{u^2}{2f}$ হইলে,

$u^2 = 2fd.$

কাজেই, $\quad t = \frac{u \pm 0}{f} = \frac{u}{f}.$

$\therefore$ কণা দুইটির মধ্যে ব্যবধান গরিষ্ঠ হইবে যাত্রামুহূর্তের $\frac{u}{f}$ সেকেণ্ড পরে।

উদাহরণ (৫) If a, b, c be the spaces described by a particle during the pth, qth, rth seconds of its motion respectively, prove that

$$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0:$$

[U. P. B 1940 ; G. U. 1949 ; C. U. 1950]

n-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $=u+\frac{1}{2}f(2n-1)$, যেখানে u ও f যথাক্রমে প্রারম্ভিক বেগ ও সমত্বরণ।

$$\therefore \quad a=u+\tfrac{1}{2}f(2p-1) \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$b=u+\tfrac{1}{2}f(2q-1) \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$c=u+\tfrac{1}{2}f(2r-1) \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$$a-b=\tfrac{1}{2}f(2p-1-2q+1)=\frac{1}{2}\times 2f(p-q)$$

$$=f(p-q). \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

অনুরূপে (ii) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া,

$$b-c=f(q-r). \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

(iv)-কে (v) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{p-q}{q-r},$$

বা, $a(q-r)-b(q-r)=b(p-q)-c(p-q)$,

বা, $a(q-r)-b(q-r+p-q)+c(p-q)=0$,

বা, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

উদাহরণ (৬) A train stops at two stations 4 miles apart and takes 8 minutes on the journey from one station to the other. If its motion is first that of uniform acceleration x and then that of uniform retardation y, find the relation between x and y. [C. U. 1953]

[এখানে স্টেশন দুইটির দূরত্ব মাইলে এবং সময় মিনিটে প্রদত্ত বলিয়া মাইল ও মিনিটের এককে গাড়ীটির ত্বরণ ও মন্দন প্রকাশ করাই সুবিধাজনক।]

রাস্তার প্রথম অংশে ত্বরণ x মাইল/মিনিট^2 ও দ্বিতীয় অংশে মন্দন y মাইল/মিনিট^2। রাস্তার প্রথম ও দ্বিতীয় অংশ যথাক্রমে s_1 ও s_2 মাইল

এবং প্রথম অংশের শেষে বেগ যেন v মাইল/মিনিট। এখন প্রথম ও দ্বিতীয় অংশ যাইতে যদি যথাক্রমে t_1 ও t_2 মিনিট লাগে, তবে

$$t_1 + t_2 = 8 \text{ মিনিট} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$v = xt_1 \text{ বা } \frac{v}{x} = t_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

আবার, দ্বিতীয় অংশে যাত্রার প্রারম্ভে বেগ v, মন্দন y বলিয়া,

$$v - yt_2 = 0,$$

$$\text{বা,} \quad v = yt_2,$$

$$\text{বা,} \quad \frac{v}{y} = t_2, \quad \cdots \quad \cdot \quad \text{(iii)}$$

এখন,

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(0+v)t_1 = \tfrac{1}{2}vt_1$$

$$\text{এবং} \quad s_2 = \tfrac{1}{2}(v+0)t_2 = \tfrac{1}{2}vt_2.$$

$$\therefore \quad s_1 + s_2 = \tfrac{1}{2}v(t_1 + t_2),$$

$$\text{অথবা } 4 = \frac{1}{\cancel{2}}\overset{4}{\cancel{8}}v, \; [\because s_1 + s_2 = 4 \text{ মাইল এবং } t_1 + t_2 = 8 \text{ মিনিট}]$$

$$\text{বা } 4v = 4$$

$$\text{বা } v = 1. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

(ii) ও (iii) যোগ করিয়া,

$$\frac{v}{x} + \frac{v}{y} = t_1 + t_2,$$

$$\text{বা,} \quad v\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 8,$$

$$\text{বা,} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8.$$

x ও y-এর মধ্যে ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

উদাহরণ (৭) A train running at 30 m. p. h. is followed by another running at 45 m. p. h. At a particular instant the front train begins to accelerate while the train behind begins to retard, both at 2 ft./sec^2 and when one is close by the other

they begin to move like a continuous train at the same uniform rate. Find, (i) the distance between them at the moment they begin to change their motion and (ii) the time from that instant to the instant of their moving together.

আমরা জানি, 45 মাইল/ঘণ্টা $= \frac{45 \times 1760 \times 3}{3600}$ বা 66 ফু./সে.

এবং 30 মাইল/ঘণ্টা $= \frac{30 \times 1760 \times 3}{3600}$ বা 44 ফু./সে. ;

t সেকেণ্ডের পর যেন গাড়ী দুইটির সমবেগ v ফু./সে.।

তাহা হইলে,

$$v = 66 - 2t = 44 + 2t,$$

বা, $4t = 66 - 44 = 22.$

$\therefore$ $t = \frac{11}{2}$ সে. ;

$\therefore$ $v = 44 + 2 \times \frac{11}{2}$ বা 55 ফু./সে.।

গাড়ী দুইটি যে-মুহূর্তে গতি-পরিবর্তন সুরু করে সেই মুহূর্ত হইতে সমান সমবেগ বা 55 ফু./সে. বেগ লাভ করা পর্যন্ত যথাক্রমে যেন s_1 ও s_2 অতিক্রম করে। তাহা হইলে গতি-পরিবর্তনের মুহূর্তে তাহাদের ব্যবধান ছিল $(s_1 - s_2)$ ফুট।

কিন্তু, $s_1 = \frac{1}{2}(66 + 55)\frac{11}{2}$, $[\because\ s = \frac{1}{2}(u+v)t]$

এবং $s_2 = \frac{1}{2}(44 + 55)\frac{11}{2}.$

$\therefore$ $s_1 - s_2 = \frac{11}{4}(66 + 55 - 44 - 55)$ ফু.

$$= \frac{11}{4} \times 22 \text{ বা } \frac{121}{2} \text{ বা } 60{\cdot}5 \text{ ফুট।}$$

অতএব, (i) নির্ণেয় দূরত্ব $= 60{\cdot}5$ ফুট ;

(ii) নির্ণেয় সময় $= \frac{11}{2}$ বা $5\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

অনুশীলনী ২৭

1. A car, uniformly accelerated, passes three successive telegraph poles P, Q, R which are 30 yds. apart. It takes 5 secs. to travel from P to Q and 4 secs. from Q to R. With what velocities does the car pass the posts P and R ?

[London University]

2. A particle moving with uniform acceleration f passes over distances s, s' in two successive seconds t, t' respectively. Prove that

$$f = \frac{2\left(\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t}\right)}{t + t'}$$ [C. U. 1948 ; '54 ; P. U. 1943]

3. A particle moving at 2 ft./sec^2 is, at the start, 16 ft. ahead of another particle moving with a uniform velocity of u ft/sec.

(i) What must be the value of u if they meet only once ? (ii) What, again, must be the minimum integral value of u if they are to meet twice ? (iii) Will they meet if the value of u is 7 ft/sec. ? If not, why ?

4. A train A starting from rest accelerate at the rate of 1·1 ft/sec^2. Until its velocity is 30 m p h. and then continues to move at this speed, another train B starting from the same station, on a parallel track, 20 secs , after A, accelerates at the rate of 2 ft/sec^2. Find, (a) the distance A moves while acceleting, (b) the distance it has moved when B overtakes it.

[London University]

5. Two particles one moving with a uniform velocity of 12 ft/sec. and the other with a uniform acceleration of 3 ft/sec^2, start from the same point. Find their maximum distance and the time when they are at that maximum distance, before they meet again.

6. Two particles move in the same straight line with constant acceleration f and f'. If their velocities be u and u' at a certain instant when they are at distances a and a' from some fixed point on the line, prove that they cannot pass each other more than twice ; and if they do so twice, the interval between the two times of passing is

$$\frac{2}{f - f'} \sqrt{\{(u - u')^2 - 2(a - a')(f - f')\}}.$$

[C. U. 1938]

7. A particle starting from rest moves first with uniform acceleration a and then uniform retardation b. It comes to rest in time t, measured from the beginning after having described a space s. Prove that

$$2(a+b)s = abt^2.$$

[Nagpur U. 1941 ; C. U. 1945]

8. A particle moving in a straight line with a uniform acceleration is observed to be at distances a, b, c, d from a marked point of the line at time $t=0$, n secs., $2n$ secs., $3n$ secs. respectively. Prove that

(i) $d - a = 3(c - b)$,

(ii) the initial velocity $= \dfrac{4b - 3a - c}{2n}$

and (iii) the acceleration $= \dfrac{c + a - 2b}{n^2}$.

[C. U. 1946]

9. If a particle moving in a straight line with uniform acceleration and an initial velocity, passes through x ft. in the t-th second and y ft. in the $(t+n)$th second, show that the acceleration is

$$\frac{y-x}{n} \text{ ft./sec}^2.$$

[W. B. H. S. 1960]

10. A particle starts from rest and moves with uniform acceleration f in its direction of motion. Prove that the space described in the m-th second is half the sum of the spaces described in the $(m+n)$th second and the $(m-n)$th second. [C. U. 1957]

11. A point moving in a straight line has a uniform acceleration m ft./sec^2 and an initial velocity mn ft./sec. Show that after $(n+k)$ secs., it returns to the same point which it was passing at the end of $(n-k)$ secs. with the same velocity. [H. S. B. S. E. 1963]

12. For $\frac{1}{m}$-th of the distance between two stations a train is uniformly accelerated and for $\frac{1}{n}$ th of the distance it is

uniformly retarded ; it starts from rest at one station and comes to rest at the other. Prove that the ratio of its greatest velocity to its average velocity is

$$\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) : 1.$$

[B. H. U. 1942]

13. A lift starting from rest ascends with a constant acceleration f, then with a constant velocity and finally stops under a constant retardation f. If the total distance ascended is s, and the total time occupied is t, show that the time during which the lift is ascending with constant velocity is

$$\left(t^2-\frac{4s}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$$

[H. S. B. S. E. 1963]

14. A train travels from rest to rest in two stages of motion. In the first stage it moves with a uniform acceleration and reaches the maximum velocity of 30 m p.h. Then it retards till coming to rest. If the total time of motion be 15 minutes, find the total distance covered.

15. A train stopping at two stations 2 miles apart takes 4 mins. on the journey from one of the stations to the other. Assuming that its motion is first that of uniform acceleration x and then that of uniform retardation y, prove that

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4.$$

[G. U. 1334]

16. A train starts from rest from a station A to reach another station B, at a distance c from A ; the motion is at first uniformly accelerated for a given time t, the velocity then remains constant for a time t' ; and is then uniformly retarded for a time t'', so that it comes to rest at B. Find the acceleration during the first stage.

[H. S. B. S. E. 1961]

17. A train moving along a straight course takes time T to perform a journey from rest to rest ; it travels for a time $\frac{2T}{[illegible]}$ with uniform acceleration attaining a velocity V, then for

a time $\frac{(2n-3)T}{n}$ with uniform velocity V and finally for a time $\frac{T}{n}$ with constant retardation. Prove that its average velocity is

$$\frac{(2n-3)V}{2n}.$$

[H. S. B. S. E. 1962]

18. A train running at a uniform speed of 20 m.p.h. is followed by another running at 30 m.p.h. When they are $26\frac{8}{9}$ ft. apart the faster train begins to retard uniformly and when it almost touches the train in front its velocity equals that of the slower train. Find the time it has retarded and the rate of retardation.

19. A particle starting from rest moves with uniform acceleration. At what time will it be in a position to move as much distance in the next second as it has already covered ?

[B. H. U. 1952]

১৪৭। অভিকর্ষাধীন গতি-সংক্রান্ত কঠিনতর প্রশ্নাবলী (Harder Problems on Motion under Gravity) :

অভিকর্ষাধীন ত্বরণের অধীন গতি আমরা ইতিপূর্বে যথেষ্ট আলোচনা করিয়াছি। পরবর্তী অনুশীলনীতে আরও কয়েকটি কঠিনতর উদাহরণ দেওয়া হইল। g অভিকর্ষজ ত্বরণ, t সময়, u উল্লম্বদিকে প্রক্ষেপবেগ এবং h উচ্চতা হইলে, আমরা জানি,—

(1) মুক্তভাবে t সময় পতনের পর বেগ $=gt$ (প্রারম্ভিক বেগ শূন্য) বলিয়া

(2) মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুদ্বারা t সময়ে

অতিক্রান্ত দূরত্ব $=\frac{1}{2}gt^2$.

(3) মাটি হইতে t সময়ে h উচ্চতা উঠিলে $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$

(4) সর্বাধিক উচ্চতা, $H=\frac{u^2}{2g}$.

(5) সর্বাধিক উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবার সময় $T=\frac{u}{g}$.

(6) সমগ্র উৎপতনকাল অর্থাৎ উত্থান ও পতনের কাল $\Big\} = \frac{2u}{g}$.

(7) h উচ্চতা হইতে পতনের পর বেগ $= \sqrt{2hg}$.

(8) h উচ্চতা আরোহণের পর বেগ $= u - gt$

$$= \pm \sqrt{u^2 - 2gh}.$$

(9) মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুদ্বারা

t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{1}{2}g(2t-1)$.

(10) উল্লম্বদিকে u বেগে উৎক্ষিপ্ত বস্তুদ্বারা

t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= u - \frac{1}{2}g(2t-1)$.

অভিকর্ষাধীন গতি সরলরেখার গতিরই একটি বিশেষ প্রকারমাত্র। কাজেই, এসম্বন্ধে অধিক আলোচনা নিষ্প্রয়োজন।

অনুশীলনী ২৮

1. The acceleration due to gravity is 32 at one place and 32·2 at another. A man can throw a small mass up to 24 ft. vertically upwards. How high can he throw the same mass with the same velocity at the first place ?

2. A ball is projected vertically upwards from ground level with an initial velocity of 40 ft./sec. It passes the lower edge of a window frame with a velocity of 10 ft./sec. With what velocity must the ball be projected so as just to reach the window frame ? [London University]

3. A particle is projected vertically upwards and it takes t secs. to rise to a height h. If it takes t' more secs. to reach the ground again, show that $h = \frac{1}{2}gtt'$. [C. U. 1953]

4. A particle is projected vertically upwards with a velocity of u ft. per sec., and after t secs. another particle is projected upwards from the same point and with the same initial velocity. Prove that the particles will meet after a lapse of $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$ secs. from the starting of the first.

[W. B. H S. 1960]

5. P and Q are two points in the same vertical line P being above Q. A heavy particle is projected vertically upwards

(খ) নিম্নমুখে f ত্বরণসহ গতিশীল অনুভূমিক তলে স্থাপিত হইলে,

$$R = m(g - f).$$

(গ) গতিশীল তল ঊর্ধ্বমুখে বা নিম্নমুখে **সমবেগে** চলিলে,

$$R = mg.$$

4. একটি কপিকলের উপর দিয়া গলানো মসৃণ অপ্রসার্য রজ্জুর দুই প্রান্তে m_1 ও m_2 ভার বদ্ধ হইলে এবং $m_1 > m_2$ হইলে,

(i) $f = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$

(ii) $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$

5. মসৃণ অনুভূমিক তলে স্থাপিত m_2 ভরের সহিত যুক্ত মসৃণ ও অপ্রসার্য রজ্জুর অপর প্রান্তে m_1 ভর যদি উল্লম্বদিকে ঝুলিতে থাকে, তবে

(i) $f = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot g.$

(ii) $T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$

6. অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে নত তলের উপর গতি হইলে,

(i) $f = \dfrac{m_1 - m_2 \text{ সাইন } \alpha}{m_1 + m_2} \cdot g.$

(ii) $T = \dfrac{m_1 m_2 (1 + \text{সাইন } \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g.$

আমরা এখানে উদাহরণের সাহায্যে আরও দুই-একটি কঠিনতর প্রশ্নের সমাধান-কৌশল দেখাইব। নিচের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণ (১) A pulley carrying a total load W hangs in a loop of a cord which passes over two fixed pulleys and has unequal weights P and Q suspended from its ends, each segment of the cord being vertical. Show that W will remain vertical, provided

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{4}{W}.$$

[C. U. 1939, '42 ; B. H. U. 1943]

স্পষ্টতই P ভারের ভর $\frac{P}{g}$ এবং Q ভারের ভর $\frac{Q}{g}$; W ভরের নিচদিকে টানে P ও Q ভার উভয়ে যখন উপরদিকে উঠিবার উপক্রম করে তখন দড়ির টান T, P ও Q প্রত্যেকটি ভার অপেক্ষা বেশী হইবার উপক্রম করে। সেই টানে P ও Q-র ভারে :ম যদি f_1 ও f_2 ত্বরণ উৎপন্ন হইবার উপক্রম হবে



১৬৭নং চিত্র

$$T - P = \frac{P}{g} f_1 \quad \cdots \quad (1)$$

$$T - Q = \frac{Q}{g} f_2 \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $2T - W = 0$ [$\because$ W স্থির]

অর্থাৎ $$T = \frac{W}{2}. \quad \cdots \quad (3)$$

কিন্তু P ও Q এই দুইটিও যদি স্থির থাকে, তবে

$$f_1 + f_2 = 0. \quad \cdots \quad (4)$$

$\therefore$ (1) ও (2)-এ T এর মান বসাইয়া,

$$\frac{W}{2} - P = \frac{P}{g} f_1 \quad \cdots \quad (5)$$

এবং $$\frac{W}{2} - Q = -\frac{Q}{g} f_1 \quad \cdots \quad (6)$$

[$\because$ $f_2 = -f_1$]

(5)-কে (6) দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\frac{\frac{W}{2} - P}{\frac{W}{2} - Q} = -\frac{P}{Q},$$

বা, $$\frac{WQ}{2} - PQ = -\frac{WP}{2} + PQ,$$

বা, $$\frac{WP}{2} + \frac{WQ}{2} = 2PQ.$$

উভয় পক্ষকে 2WPQ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{4Q}+\frac{1}{4P}=\frac{1}{W},$$

অথবা, $$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}\right)=\frac{1}{W}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=\frac{4}{W}.$$

উদাহরণ (২) Two weights W and W′ are connected by a light inextensible string which passes over a light pulley. If the pulley moves vertically upwards with an acceleration equal to that of gravity, show that the tension of the string is

$$\frac{4WW'}{W+W'}.$$

W ভারটি যেন W′ ভার অপেক্ষা বড়। দড়ির টান T এবং ভারসহ কপি-কলের গতি না থাকিলে W এবং W′ এর ত্বরণ যেন যথাক্রমে f ও f'। কিন্তু কপিকলটি W ও W′ সহ g ফু./সে.² ত্বরণে ঊর্ধ্বগামী। কাজেই W ও W′এর আপেক্ষিক ত্বরণ যথাক্রমে $f+g$ ও $f'-g$। দ্বিতীয়ত, W ও W′ একই ত্বরণে গতিশীলও বটে।

$$\therefore\quad f+g=f'-g,$$

অথবা, $$f'-f=2g. \qquad \cdots \qquad \cdots (1)$$

আবার, $$W-T=\frac{W}{g}\cdot f \cdots (2) \left[\because\ W \text{ ভারের ভর}=\frac{W}{g}\right]$$

$$T-W'=\frac{W'}{g}f' \cdots (3) \left[\because\ W' \text{ ভারের ভর}=\frac{W'}{g}\right]$$

(2) হইতে, $f=\frac{W-T}{W}\cdot g$ এবং (3) হইতে, $f'=\frac{T-W'}{W'}\cdot g$.

∴ (1)-এ f ও f'এর মান বসাইয়া,

$$\frac{T-W'}{W'}g-\frac{W-T}{W}g=2g,$$

বা, $$\frac{T-W'}{W'}-\frac{W-T}{W}=2,$$

বা, $\frac{T}{W'} - 1 - 1 + \frac{T}{W} = 2,$

বা, $T\left(\frac{1}{W'} + \frac{1}{W}\right) = 4,$

বা, $T\frac{(W + W')}{WW'} = 4.$

$\therefore\ T = \frac{4WW'}{W + W'}.$

অনুশীলনী ২৯

1. A bullet of mass 10 ounce fired into a wall with a velocity of 160 ft. per sec. loses its velocity in penetrating into the wall through 6 inches. Find the force exerted on the bullet by the wall (assuming it to be uniform). [C. U. 1955]

2. A bullet is fired with a velocity v into a plank and loses $\frac{1}{3}$th of its velocity after penetrating it. It then strikes a second similar plank which it just passes through. Find the ratio of the thickness of the planks. [Utkal U. 1949]

3. A mass of 4 lbs. falls through 100 ft. from rest and is then brought to rest by penetrating 2 ft. into some sand. Find the thrust of the sand on it, supposing it to be uniform. [C. U. 1950]

4. A bullet of mass 4 oz. is moving with a velocity of 1200 ft. per second. Find the uniform force which would stop it in one second. [Pat. U. 1944]

5. A body weighing 80 lbs. falls from a height of 30 ft. into some sand. Assuming the retarding force of the sand to be constant, find its magnitude if the body penetrates 4 ft. before coming to rest. [U. P. B. 1952]

6. A cyclist whose mass together with that of his cycle is 200 lbs.-wt. is running at the rate of 16 ft./sec. If he stops pedalling find how far he can go before coming to rest, if the total resistance to his motion be 10 lbs.-wt. [U. P. B. 1947 ; B. H. U. 1947]

7. A train weighing 300 tons is being pulled up an incline of 1 in 150 by an engine. If the resistance is constant and is

equal to 1/40 of the weight, and the acceleration of the train be 3 feet per second, per second, find the pull of the engine.
[C. U. 1939]

8. A train runs from rest for 1 mile down an incline of 1 in 100. If the resistance be equal to 8 lbs.-wt. per ton, how far will the train be carried along the horizontal level at the foot of the incline ? [U. P. B. 1941]

9. A motor-car driven with a constant force at all speeds meets with air resistance proportional to the square of the velocity. If u be the maximum speed of the car, show that its acceleration when running at speed v varies as $u^2 - v^2$.
[Mysore U. 1935]

[সংকেত : বেগ যখন গরিষ্ঠ তখন, প্রযুক্ত বল P = বাধা $R = ku^2$; বেগ যখন v তখন $R = kv^2$, $(P - R) = mf$ অথবা $ku^2 - kv^2 = mf$ অর্থাৎ $f = \frac{k}{m}(u^2 - v^2)$; $\therefore$ $f \propto (u^2 - v^2)$.]

10. Two moving masses are brought to rest by equal constant resistances. If one mass moves for twice as long as the other, but goes only one-third of the distance, find the ratio of their masses and also that of their velocities.
[Andhra U. 1946]

[সংকেত : ভর দুইটি R বাধার বিরুদ্ধে যথাক্রমে $2t$ ও t সময়ে s ও $3s$ যায় ; তাহাদের ভর, প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে m_1, u_1, f_1 ও m_2, u_2, f_2 ; $s = u_1 t$ এবং $3s = \frac{1}{2}u_2 t$ বলিয়া $\frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{6}$; আবার $R = m_1 f_1 = m_2 f_2$ এবং $u_1 = 2f_1 t$ ও $u_2 = u_2 t$ বলিয়া $\frac{m_1}{m_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{2u_2}{u_1} = 12 : 1$.]

11. A man weighing 12 stones is descending in a lift with acceleration 8 ft. per sec^2. Find the thrust of his feet on the floor of the lift. Calculate the same when he is ascending with the same acceleration. What would happen to this thrust if the chain of the lift brake ? [C. U. 1943]

12. A balloon is rising with acceleration f. Prove that the fraction of the weight of the balloon which must be emptied out in the form of sand in order to double this acceleration is $\frac{f}{2f + g}$, assuming the upthrust of the air to remain unaltered and neglecting air resistance. [C. U. 1946]

[সংকেত : বেলুনের m ভরের $\frac{1}{n}$-তম অংশ বা $\frac{m}{n}$ ভর ফেলিয়া দিলে যেন উহার f ত্বরণ $2f$ হয় ; তাহা হইলে $R = m(g+f)$ এবং $R = \left(m - \frac{m}{n}\right)(g+2f)$; এই দুই সমীকরণ হইতে $\frac{1}{n} = \frac{f}{g+2f}$.]

13. A man who has just dined at a hotel stands on the floor of a lift which is descending with an acceleration f. His feet press the floor of the lift with a force W equal to his weight before he dined. Find the weight of what he has consumed.

[Andhra U. 1933]

[সংকেত : লোকটির ভার W, ভর $\frac{W}{g}$; খাদ্যের ভর m ;

$$\therefore \quad W + mg - W = \left(\frac{W}{g} + m\right) f ;$$

$$m = \frac{Wf}{g(g-f)}. \text{]}$$

14. A man jumps out from a height h with a heavy weight. What is the pressure of the weight on his hand during his fall ?

15. A mass of 3 lbs., descending vertically, draws up a mass of 2 lbs. by means of a light string passing over a pulley ; at the end of 5 seconds the string breaks ; find how much higher the 2 lbs. mass will go. [P. U. 1935 ; U. P. B. 1934, '36]

16. A mass of 3 lbs., descending vertically, draws up a mass of $2\frac{1}{2}$ lbs. by means of a light string passing over a pulley ; at the end of 11 seconds the string breaks ; find how much higher the $2\frac{1}{2}$ lbs. mass will go. [U. P. B. 1955]

17. A free chain passes over a smooth peg. Show that the pressure on the peg is $\frac{4w_1 w_2}{w_1 + w_2}$, where w_1 and w_2 are the weights of the chain on either side of the peg.

[Bombay B. A. 1935]

18. A fine string passes over a smooth pulley and carries a hook weighing 4 oz. at each end. On one of these hooks is hung a ball of 3 lbs. and on the other an unknown weight. If the former rises with an acceleration of 2 ft. sec^2, find the

unknown weight, the tension of the string, and the perssure between each hook and the load it carries.

[Madras B. A. 1926]

19. Two particles of masses m_1 and m_2 are connected by a light inextensible string which passes over a small smooth fixed pulley. If m_1 be greater than m_2, find the resulting motion of the system and the tension of the string. Further show that the thrust of the axis of the pulley upon its supports is always less than the sum of the weights of the masses.

[B. H. U. 1957]

20. Two scale-pans each of mass 3 lbs. are connected by a string passing over a smooth pulley. Show how to divide a mass of 12 lbs. between the two scale-pans so that the heavier may descend a distance of 50 feet in the first five seconds.

[Madras B. A. 1924]

21. Two weights are connected by an inelastic string, passing over a smooth pulley and one wt. is 3 times the other. After 2 secs. from rest, the descending weight is suddenly stopped, and immediately allowed to fall again. Find the time that elapses before the string becomes tight again.

[U. P. B. 1945]

[সংকেত : সাধারণ ত্বরণ নির্ণয় করিয়া দেখাও যে, 2 সেকেণ্ড পরে ছোট ভরটির বেগ 32 ফু./সে. এবং বড়টির বেগ শূন্য ; বড়টি আবার ছাড়িলে দড়ি টান হওয়া অবধি উভয়ের ত্বরণ g ; t সময়ে ছোটটি যতদূর উপরে উঠে, বড়টি ততদূর নামিলেই দড়ি টান হইবে ; $\therefore\ 32t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$; ইত্যাদি ।]

22. Two light inextensible strings pass over a small smooth pulley. On one side they are attached to masses 3 lbs. and 4 lbs. respectively, and on the other side to a mass 5 lbs. Find the acceleration of the system and the tensions of the strings.

[U. P. B. 1940]

[সংকেত : ভর তিনটির সাধারণ ত্বরণ f এবং দড়ি দুইটিতে টান যেন T_1 ও T_2 ; 5 পাউণ্ড ভরে দুইটি টানই আছে ; (i) $3g - T_1 = 3f$; (ii) $4g - T_2 = 4f$ এবং (iii) $T_1 + T_2 - 5g = 5f$; এইগুলি হইতে f-এর মান বাহির করিয়া T_1 ও T_2 নির্ণয় কর ।]

23. A mass of 9 lbs. is attached to one end of a string and masses of 7 lbs. and 4 lbs. to the other end, and the whole is

hung up over a pulley. The system is allowed to move for 13 secs., when the 4 lbs. mass is cut away. How long will it be before the system comes instantaneously to rest ?

[U. P. B. 1939]

24. Masses m and $2m$ are connected by a string which passes over a smooth pulley. The ascending body picks up a mass m at the end of 3 secs. Find the resulting motion.

[C. U. 1943, '55]

[সংকেত : দেখাও যে, 3 সেকেণ্ড পর সাধারণ বেগ = 32 ফু./সে. ; তৃতীয় ভরটি তুলিয়া লওয়ার পূর্বে ভরবেগ = $3m \times 32$ এবং পরে ভরবেগ = $4m \times v$ হইলে, $4mv = 3m \times 32$; $\therefore$ $v = 24$ ফু./সে. ।]

25. A weight of 6 lbs. hanging over the edge of a table draws a weight of 10 lbs. on a rough table. If the coefficient of friction between the table and the weight is ·4, find the acceleration and the tension. If the string breaks after the masses have been moving for 1 second, find how far the mass 10 lbs. moves altogether before coming to rest.

[Madras B. A. 1936]

26. A string passing across a smooth table at right angles to two opposite edges has attached to it at the ends two masees P and Q which hang vertically. Prove that if a mass M be attached to the portion of the string which is on the table, the acceleration of the system when left to itself will be

$$\frac{P - Q}{P + Q + M} \cdot g.$$ [C. U. 1951 ; Utkal U. 1948]

27. Two bodies of masses 2 lbs. and 30 lbs. respectively, lie on a smooth horizontal table whose height from the floor is 27 inches. The bodies are connected by an inextensible string whose length is not less than 27 inches, and, when the string is taut, the smaller mass is dropped through a hole in the table. Find the time that elapses before it reaches the ground.

[U. P. B. 1944]

28. A particle of mass 5 lbs. is placed at the bottom of a smooth inclined plane whose length is 20 ft. and height 4 ft. This particle is connected by a light string passing over a smooth pulley, at the edge of the plane, to another particle of mass 3 lbs. hanging just over the pulley. Find how long it will take the smaller particle to reach the ground.

[U. P. B. 1957]

29. A mass of 5 lbs. resting on a smooth inclined plane of inclination 30° is connected by a string passing over a pulley at the top of the plane to a mass of 5 lbs. hanging vertically.

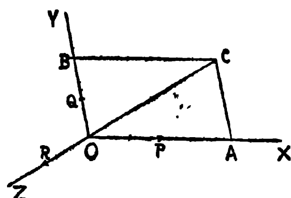
(a) Find the tension in the string when (1) the weight on the plane is fixed ; (2) the hanging wt. is supported on hand ; (3) both weights are free to move.

(b) The string is cut off after the masses have been in motion for 5 secs. How long will the mass on the plane continue to move and how much distance will it describe before coming to rest ? [U. P. B. 1951]

বলের সংশ্লেষ ও বিশ্লেষ: লামির সূত্র (Composition and resolution of forces : Lami's Theorem)

১৪৯। **লামির সূত্র: একই বিন্দুতে সক্রিয় তিনটি বল সাম্যাবস্থাপন্ন হইলে, উহাদের প্রত্যেকটি অপর দুইটির অন্তর্বর্তী কোণের সাইনের সমানুপাতী হয়।**

(If three forces are in equilibrium, then each of them is proportional to the sine of the angle between the other two forces.)



১৬৮নং চিত্র

O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY এবং OZ বরাবর সক্রিয় P, Q ও R এই তিনটি বল যেন সাম্যাবস্থাপন্ন।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{P}{\text{সাইন } YOZ} = \frac{Q}{\text{সাইন } ZOX} = \frac{R}{\text{সাইন } XOY}.$$

এখন, OX-এর OA অংশ যে-মানে P একক সূচিত করে, OY-র OB অংশ যেন সেই মাপে Q একক সূচিত করে। তাহা হইলে OA ও OB যথাক্রমে P ও Q বলকে দিকে ও মানে সূচিত করে। সুতরাং, তাহাদের লব্ধি OACB সামান্তরিকের OC কর্ণদ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

P, Q ও R সাম্যাবস্থাপন্ন বলিয়া P ও Q-র লব্ধি নিশ্চয় অবশিষ্ট বল B-এর সমান ও বিপরীতমুখী। কাজেই, CO দ্বারা R বল অবশ্যই দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

এখন, ত্রিকোণমিতি অনুসারে OAC ত্রিভুজে,

$$\frac{OA}{\text{সাইন } ACO} = \frac{AC}{\text{সাইন } COA} = \frac{CO}{\text{সাইন } OAC};$$

কিন্তু, সাইন ACO = সাইন COB = সাইন (180° − YOZ) = সাইন YOZ,

সাইন COA = সাইন (180° − ZOX) = সাইন ZOX,

সাইন OAC = সাইন (180° − XOX) = সাইন XOY,

এবং OA, AC ও CO যথাক্রমে P, Q ও R-কে দিকে ও মানে সূচিত করে।

$$\therefore \quad \frac{P}{\text{সাইন } YOZ} = \frac{Q}{\text{সাইন } ZOX} = \frac{R}{\text{সাইন } XOY}.$$

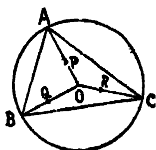
লামির সূত্রের প্রয়োগ

উদাহরণ (১) Three forces P, Q and R acting along OA, OB and OC are in equilibrium. If O is the circum-centre of the triangle ABC, prove that

$$\frac{P}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}} = \frac{Q}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}} = \frac{R}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}}, \text{ where}$$

a, b, c are the lengths of the sides BC, CA, and AB.

[C. U. 1938]



১৬৯নং চিত্র

P, Q ও R সাম্যাবস্থায় আছে। লামির সূত্র অনুসারে,

$$\frac{P}{\text{সাইন } BOC} = \frac{Q}{\text{সাইন } AOC} = \frac{R}{\text{সাইন } AOB}$$

কিন্তু কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = 2 \times$ পরিধিস্থ $\angle BAC = \angle 2A$,

অনুরূপে $\angle AOC = \angle 2B$ এবং $\angle AOB = \angle 2C$.

$$\therefore \quad \frac{P}{\text{সাইন } 2A} = \frac{Q}{\text{সাইন } 2B} = \frac{R}{\text{সাইন } 2C},$$

বা, $$\frac{P}{2 \text{ সাইন } A \text{ কস } A} = \frac{Q}{2 \text{ সাইন } B \text{ কস } B} = \frac{R}{2 \text{ সাইন } C \text{ কস } C}.$$

এখন, ত্রিকোণমিতির নিয়মে,

$$\frac{\text{সাইন A}}{a}=\frac{\text{সাইন B}}{b}=\frac{\text{সাইন C}}{c}=2R, \quad \text{এবং}$$

$$\text{কস A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ কস B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \text{ কস C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

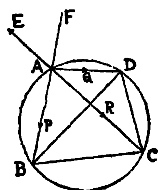
$$\therefore \frac{P}{4Ra\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}}=\frac{Q}{4Rb\frac{(c^2+a^2-b^2)}{2ca}}=\frac{R}{4Rc\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{P}{a\frac{(b^2+c^2-a^2)}{abc.bc}}=\frac{Q}{b\frac{(c^2+a^2-b^2)}{abc.ca}}=\frac{R}{c\frac{(a^2+b^2-c^2)}{abc.ab}}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{P}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}}=\frac{Q}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}}=\frac{R}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}}$$

উদাহরণ (২) The resultant of two forces P and Q acting along AB and AD of a cyclic quadrilateral, act along the diagonal AC. Prove that,

$$P : Q : R = CD : CB : BD.$$



১৭০নং চিত্র

P, Q বলের লব্ধি R, AC বরাবর সক্রিয়। সুতরাং, AB বরাবর P, AD বরাবর Q এবং CA বরাবর R (অর্থাৎ P ও Q-এর লব্ধির সমান R বলের বিপরীত দিকে) কাজ করিলে, P, Q ও R সাম্যাবস্থায় থাকিবে। অতএব, লামির সূত্র অনুসারে,

$$\frac{P}{\text{সাইন DAE}}=\frac{Q}{\text{সাইন BAE}}=\frac{R}{\text{সাইন BAD}},$$

$$\text{বা,} \quad \frac{P}{\text{সাইন}(180^\circ-\text{CAD})}=\frac{Q}{\text{সাইন EAF}}=\frac{R}{\text{সাইন}(180^\circ-\text{BCD})}$$

[$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণের সমষ্টি = 180°]

বা, $\frac{P}{\text{সাইন } CAD} = \frac{Q}{\text{সাইন } BAC} = \frac{R}{\text{সাইন } BCD}$,

বা, $\frac{P}{\text{সাইন } CBD} = \frac{Q}{\text{সাইন } BDC} = \frac{R}{\text{সাইন } BCD}$ [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কোণ সকল সমান বলিয়া]

কিন্তু ত্রিকোণমিতির নিয়মে,

$$\frac{\text{সাইন } CBD}{CD} = \frac{\text{সাইন } BDC}{BC} = \frac{\text{সাইন } BCD}{BD} = 2R$$

[যেখানে R ত্রিভুজ BCD-র পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ সাইন CBD = 2R.CD, সাইন BDC = 2R.BC,
এবং সাইন BCD = 2R.BD.

$$\therefore \frac{P}{2R.CD} = \frac{Q}{2R.BC} = \frac{R}{2R.BD},$$

বা $\frac{P}{CD} = \frac{Q}{BC} = \frac{R}{BD}$.

∴ P : Q : R = CD : CB : BD.

বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদাহরণ (৩) The resultant of two forces P and Q is R; if Q be doubled, R is doubled whilst, if Q be reversed, R is again doubled; show that

$P : Q : R :: \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$. [B. H. U. 1952]

P ও Q বলের মধ্যবর্তী কোণ যেন a ; তাহা হইলে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$ কস a. ... ... (1)

আবার প্রশ্নানুসারে, P ও 2Q-র লব্ধি 2R বলিয়া,

$4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ$ কস a. ... ... (2)

তৃতীয়ত, Q-র দিক্ যদি উল্টাইয়া যায় অর্থাৎ উহা যদি 180° পরিমাণ ঘুরিয়া যায়, তবে P ও Q-র মধ্যে কোণ $(180° - a)$;

∴ $4R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$ কস $(180° - a)$

$= P^2 + Q^2 - 2PQ$ কস a. ... (3)

(1) ও (3) যোগ করিয়া,

$$5R^2 = 2P^2 + 2Q^2. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(3)-র 2 গুণের সহিত (2)-কে যোগ করিয়া,

$$12R^2 = 3P^2 + 6Q^2,$$

বা, $4R^2 = P^2 + 2Q^2. \quad \cdots \quad \cdots\cdot \quad (5)$

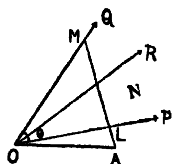
(4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া,

$R^2 = P^2$; $\therefore$ $4R^2 = R^2 + 2Q^2$ বা $3R^2 = 2Q^2$.

$\therefore$ $\dfrac{R^2}{2} = \dfrac{Q^2}{3}$, বা, $\dfrac{R}{\sqrt{2}} = \dfrac{Q}{\sqrt{3}} = \dfrac{P}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

উদাহরণ (৪) Two forces P and Q, inclined to each other at some angle, act at O and have a resultant R. A transversal cuts their directions in L, M and N respectively. Prove that



১৭১নং চিত্র

$$\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}. \text{ [B. H. U. 1956]}$$

O বিন্দু হইতে ছেদকটির উপর OA যেন লম্ব। এখন OA বরাবর P ও Q-র বিশ্লেষিতাংশ = ঐ রেখা বরাবর R-এর বিশ্লেষিতাংশ।

অর্থাৎ P কস AOL + Q কস AOM = R কস AON,

বা, $P.\dfrac{OA}{OL} + Q.\dfrac{OA}{OM} = R.\dfrac{OA}{ON}$.

উভয় পার্শ্বকে OA দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}.$$

অনুশীলনী ৩০

1. The resultant of two forces acting at an angle of 150° is perpendicular to the smaller component. The greater component is 100 lbs.-wt. ; obtain the other component and the resultant.

[P. U. 1931]

2. ABC is a triangle of which O is the centre of the inscribed circle. Three forces P, Q and R act along OA, OB, OC on a particle placed at O. Prove that when the forces are in equilibrium,

$$\frac{P}{\text{কস}\frac{A}{2}}=\frac{Q}{\text{কস}\frac{B}{2}}=\frac{R}{\text{কস}\frac{C}{2}}$$ [C. U. 1953]

[সংকেত : O বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া, OA, OB, OC যথাক্রমে A, B ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডক। দেখাও যে, $\angle BOC=\left(90°+\frac{A}{2}\right)$; $\angle COA=\left(90°+\frac{B}{2}\right)$ এবং $\angle AOB=90°+\frac{C}{2}$. ইহার পর লামির সূত্র প্রয়োগ করিয়া প্রশ্নের সমাধান কর।]

3. O is the circum-centre of the triangle ABC. If forces P, Q, R acting along OA, OB, OC be in equilibrium, show that

$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)}=\frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)},$$

where a, b, c are the sides BC, CA, AB of the triangle.
[C. U. 1949]

4. Three forces in equilibrium act perpendicularly to the three sides of a triangle ABC. Show that the forces are proportional to sin A, sin B, sin C. [C. U. 1924 ; P. U. 1938]

5. Three forces act in given directions at a point O and are in equilibrium. If a circle is drawn through O to cut the lines of action of the forces in A, B, C respectively, prove that the forces are proportional to the sides of the triangle ABC.
[C. U. 1940]

6. A uniform plane lamina in the form of a rhombus, one of whose angles is 120°, is supported by two forces applied at the centre in the directions of the diagonals so that one side of the rhombus is horizontal ; show that, if P and Q be the forces, and if P be the greater force, then

$$P^2=3Q^2$$ [U. P. B. 1942]

7. A, B, C are the points on the circumference of a circle. Forces act along AB and BC inversely proportional to these

lines in magnitude ; show that their resultant acts along the tangent at B. [P. U. 1944]

[সংকেত : AB-কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর। B বিন্দুতে ST স্পর্শক টান। S ও C যেন AB-র একই পাশে। AB ও BC বরাবর সক্রিয় বলদ্বয় যথাক্রমে P ও Q হইলে,

$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AB}=K. \quad \text{আবার, } \frac{BC}{\text{সাইন } A}=\frac{AB}{\text{সাইন } C};$$

$$\therefore \frac{P}{\text{সাইন } A}=\frac{Q}{\text{সাইন } C}; \qquad \text{সাইন } A=\text{সাইন } CBT,$$

এবং সাইন C = সাইন DBT বলিয়া,

$$\frac{P}{\text{সাইন } CBT}=\frac{Q}{\text{সাইন } DBT}.$$

এখন BT বরাবর সক্রিয় R বলের মান যদি এমন হয় যে,

$$\frac{P}{\text{সাইন } CBT}=\frac{Q}{\text{সাইন } DBT}=\frac{R}{\text{সাইন } CBD},$$

তবে লামির সূত্রানুসারে P, Q, R-এর লব্ধি শূন্য। সুতরাং, P ও Q-র লব্ধি BS স্পর্শক বরাবর সক্রিয় R বল।]

8. A particle whose weight is W may be supported on a smooth inclined plane by a force P acting horizontally or by a force Q acting parallel to the plane. Show that

$$\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{P^2}+\frac{1}{W^2}.$$

If R be the pressure on the plane in the first case and S the pressure in the 2nd case, show that $RS=W^2$.

[Nagpur U. 1932]

9. Two forces of magnitudes 3P and 2P respectively have a resultant R. If the first force is doubled, the magnitude of the resultant is doubled. Find the angle between the forces.

[C. U. 1955]

10. Two forces P and Q act at an angle α and have a resultant R. If each force be increased in magnitude by R, prove that the new resultant makes an angle θ with R such that

$$\tan\theta=\frac{(P-Q)\sin\alpha}{P+Q+R+(P+Q)\cos\alpha}. \quad [\text{ P. U. 1943 }]$$

11. A particle of mass 20 lbs. is suspended by two strings of length 3 ft. and 4 ft. respectively attached to two points in the same horizontal lines 5 ft. apart ; find the tension of the strings. [C. U. 1919]

12. A body of mass 10 lbs. is suspended by two strings 7 and 24 inches long, their other ends being fastened to the extremities of a rod of length 25 inches. If the rod be so held that the body hangs immediately below its middle point, find the tensions of the strings. [B. H. U. 1950]

13. A load P is suported by two chains PA, PB fastened to two points A and B in the same horizontal line, the strings being equally strong but of unequal lengths. If the breaking tension of the chains be 4,000 lbs.-wt., find what maximum load they will support in the case when AB = 20 ft., PA = 16 ft. and PB = 12 ft. [D. B. 1926]

14. PQRS is a quadrilateral. Prove that the resultant of the forces completely represented by the sides PQ, QR, PS, SR is represented in magnitude and direction by 2PR, and that its line of action bisects QS. [C. U. 1949]

15. The sides AB, BC, CD and DA of a quadrilateral are bisected at E, F, G, and H respectively. Show that the resultant of the forces acting at a point which are represented in magnitude and direction by EG and HF is represented in magnitude and direction by AC. [Delhi U. 1928]

16. ABCD is a regular pentagon, and forces acting at a point are represented in magnitude and direction by the lines AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE and DE. Prove that the magnitude of their resultant is represented by 4AE + 2BD. [C. U. 1939]

17. O is a point inside a triangle ABC. If forces represented by OA, OB, OC are in equilibrium, show that O is the point of intersection of the medians of the triangle. [C. U. 1942]

অনুশীলনী ৩১

সমান্তরাল বল-সংক্রান্ত অতিরিক্ত প্রশ্নাবলী

1. A uniform heavy beam of length $4a$ and weight W rests horizontally on two pegs distance $2a$, the middle point of the

beam being equidistant from the two pegs. Find the greatest weight that can be placed on one end without upsetting it.
[C. U. 1930]

2. A line AB is divided into two parts at C. The resultant of two like parallel forces P and Q acting through the middle points of AC and CB passes through C. If P and Q be interchanged in position, show that their resultant will pass through the middle point of AB. [C. U. 1927]

3. Two like parallel forces P and Q act on a body. If two equal and unlike parallel forces S, acting at the ends of an arm b, in the plane of P and Q are combined with them, show that their resultant is displaced through a distance $\frac{bS}{P+Q}$.
[P. U. 1936]

4. Three like parallel forces P, Q, R act at the vertices A, B, C of a triangle and are respectively proportional to the sides BC, CA, AB. Show that the resultant passes through the incentre of the triangle ABC. [Andhra B. A. 1947]

5. A uniform bar balances about a fulcrum placed 'a' inches from one end, when a weight P is suspended from that end, and about a fulcrum placed 'b' inches from the end when a weight of Q is suspended from it. Show that the weight of the bar is equal to $\frac{Pa-Qb}{b-a}$ and the length of the bar is equal to $\frac{2ab(P-Q)}{Pa-Qb}$. [B. H. U. 1943]

উত্তরমালা

অনুশীলনী ১৯

1. (i) 1120 ফু.-পা. । (ii) 20 ফু. ; 2240 ফু.-পা । 2. 2688 ফু.-পা. ।
3. 180 ফু.-পা. । 4. 25 ফু.-পা. । 5. 100 পা. । 6. 5 ফু.-পা. ।
7. 500 ফু.-পা. । 8. 4000 ফু.-পা. । 9. 3600 ফু.-পা. । 10. 61248 ফু.-পা. ।
11. (i) 144 ফু.-পা. । (ii) 3 সেকেণ্ড । 12. 3168000 ফু.-পা. ।
13. 1125000 ফু.-পা. । 14. 1925×10^5 ফু.-পা. । 15. $72\pi(9a + 16b)$.
16. 22 ঘণ্টা । 17. $358\frac{2}{3}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 18. $13\frac{1}{3}$ অশ্ব-ক্ষমতা ।
19. 352 ঘনফুট । 20. 8 অশ্ব-ক্ষমতা । 21. $124\frac{1}{128}$ অশ্ব-ক্ষমতা ।
22. $7\frac{7}{11}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 23. $142\frac{1}{22}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 24. $80\frac{5}{11}$ অশ্ব-ক্ষমতা ।
25. $157132937\frac{1}{2}$ ফু.-পা. ; $476\frac{77}{480}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 26. 45 অশ্ব-ক্ষমতা ।
27. $3\frac{1}{3}$ অশ্ব-ক্ষমতা ; $6\frac{2}{3}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 28. $806\frac{2}{3}$ অশ্ব-ক্ষমতা ।
29. $3\frac{3}{4}$ পা.-ভার ; $5\frac{5}{11}$ মা./ঘ. । 31. 876 অশ্ব-ক্ষমতা ।

অনুশীলনী ২০

1. 2500 পা.-ভার । 2. 484 ফু.-পা.-ভার ; $8\frac{1}{18}$ পা. । 3. 16 ফু./সে. ।
4. 9 ফুট । 5. ·5 কি.-গ্রাম । 6. 44 পা. । 7. 152 ফু.-পা. ।
8. 1000 পা. । 9. 31250 পাউণ্ড্যাল ; $\frac{1}{800}$ সেকেণ্ড । 10. $\frac{2}{3}h$.
11. 3850 পা. । 12. 2 ফু. ; $\frac{1}{320}$ সে. । 13. 1300 ফুট/সেকেণ্ড ;
$\frac{1}{4}$ ইঞ্চি । 14. $500\sqrt{3}$ ফু./সে. । 15. 60 ফু.-পা. ; 60 ফু.-পা. ।
17. 6875 পাউণ্ড্যাল । 18. 1 পা. । 19. 28 ফু./সে. । 20. 4-এ 1.
21. 8 ফু./সে. । 22. 358·4 অশ্বশক্তি ; $4\frac{7}{12}$ মাইল । 23. 72 অশ্বশক্তি ।
24. 14700 পা. ; 784 অশ্ব-ক্ষমতা । 25. 320 অশ্ব-ক্ষমতা ;
143·36 অশ্ব-ক্ষমতা । 26. $3\frac{5}{9}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 27. (*a*) 100 পা. ;
(*b*) 8 অশ্ব-ক্ষমতা । 28. $1\frac{2}{3}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 29. 896 অশ্ব-ক্ষমতা ।
30. $30\frac{10}{33}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 31. $14\frac{2}{3}$ অশ্ব-ক্ষমতা । 32. $31\frac{1}{3}$ অশ্ব-ক্ষমতা ।
33. 140 অশ্ব-ক্ষমতা । 34. $\frac{M}{M+m}u$; $\frac{m}{M+m}u$.
35. 2400 ফুট-পাউণ্ড্যাল ।

অনুশীলনী ২১

1. 6 পা. ; 9 পা. ; $7\frac{1}{2}$ পা. ভার 6 পা. ভারের সহিত যোগ করিতে হইবে। 2. 10 পা.। 3. 12 পা. ; 20 পা.। 4. $7\frac{1}{3}$ পা. 5. (i) 1400 পা. ; (ii) 1540 পা.। 6. আলম্ববিন্দু (জাঁতির কব্জা) হইতে $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি দূরে। 7. 20 পা. ; 2 ফু.। 8. একটি পাল্লায় $\frac{1}{78}$ পা. লাভ ; অপর পাল্লায় $\frac{1}{78}$ পা. ক্ষতি। 9. 5 পা. ; 20″ ও 16″. 10. 12·48 ইঞ্চি ; 10·48 পা.। 11. 100 : 101. 12. 5 পা. 10 আ. ; 20 ইঞ্চি, 18 ইঞ্চি। 13. $3 : 2\sqrt{2}$. 14. 3 : 2 ; 6 পা.। 15. 5 পা. ; $1\frac{2}{3}$ ফু. এবং $1\frac{1}{3}$ ফু.। 17. $\frac{5}{31}$% ক্ষতি। 18. 1 আনা ক্ষতি। 19. 18 ইঞ্চি। 20. 5 ইঞ্চি। 21. 14 পা.। 22. $3\frac{1}{2}$ ফু.। 23. 3 ইঞ্চি। 24. 20 ইঞ্চি এবং 4 ইঞ্চি। 25. 1500 ফু.-পা.। 26. 4 ইঞ্চি। 27. 46 পা.। 28. $63\frac{9}{37}$ পা.।

অনুশীলনী ২২

1. (i) 26 পা. ; (ii) 24 পা.। 2. 60°. 3. (i) 15 পা. ; (ii) 12 পা.। 4. এখানে (i) acting horizontally on ; (ii) acting up a plane inclined at 30° to the horizon—এইরূপ পড়। (i) $8\sqrt{3}$ পা. ; (ii) 16 পা.। 5. 36 পা.। 6. উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বমুখে। 7. $15\sqrt{2}$ পা.। 8. 30°. 9. 8 পা.। 10. 48 পা. ; 63 ফুট। 11. 4 এ 1 ; 220 গজ। 12. 75 পা.। 13. 96 পা.। 14. প্রত্যেক বাহু 12 ইঞ্চি। 15. সাইন$^{-1}\frac{60}{169}$. 16. 2 পা.। 17. $3\frac{1}{2}$ ই.। 18. $\frac{1}{3}$ ই.। 19. 2112 পা.। 20. 4 ইঞ্চি। 21. 132, $33\frac{1}{3}$%. 22. 1500 ফু.-পা.-ভার। 23. 150, 1875 ফু.-পা.-ভার। 24. 300. 25. 25%, $a=\frac{1}{30}$, $b=1$.

অনুশীলনী ২৩

1. 7, 14 পা.। 2. (*a*) 50 পা. ; (*b*) 4 ; (*c*) 40 পা.। 3. 9, 20 পা.। 4. 4, 64 পা.। 5. 95 পা.। 6. 6. 7. 6 ; 10 পা.। 8. 10 পা.। 9. 55·5%, 79·4%, 60 গ্রাম-ভার। 10. $\frac{W-W'}{w-w'}, \frac{Ww'-W'w}{w-w'}$.

11. 112 পা.। 12. 125 পা.। 13. 84 পা. ; 728 পা.।
14. 1 স্টোন। 15. 25 পা.। 16. $6\frac{1}{3}$ স্টোন। 17. 4 পা.।
18. 30 ফুট। 19. 3 ই.। 20. 72 পা.। 21. 12. 22. 90 পা.।

অনুশীলনী ২৪

1. 48 $\sqrt{5}$ ফু./সে. ; অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে। 2. 24° 20′ ; 54·9 ফু./সে.। 3. 96 ফু./সে.। 4. 80 ফু./সে.। 5. 18·75 ফুট, 43·3 ফুট। 6. (*a*) 1600 ফুট। (*b*) 6400 $\sqrt{3}$ ফুট। (*c*) 20 সে.। 7. 440 $\sqrt{5}$ ফুট। 8. 40 $\sqrt{330}$ ফুট./সে.। 9. 160 $\sqrt{2}$ ফু./সে.। 10. 40 $\sqrt{2}$ ফু./সে.। 11. 80 ফু./সে. ; অনুভূমিক তলের সহিত ট্যান$^{-1}$ $\frac{4}{3}$ কোণে। 12. 52 $\sqrt{3}$ ফু./সে. ; (প্রায়) 42 ফু.। 13. (i) $\frac{50}{22}$ সে. ; (ii) $45\frac{5}{11}$ ফু./সে. ; (iii) 2·6 ফুট। 14. 40 $\sqrt{6}$ ফু./সে. ; অনুভূমিক তলের সহিত 45° কোণে। 15. 4 সে. ; 64 $\sqrt{3}$ ফুট। 16. 30 সে.। 17. 60 $\sqrt{3}$ ফুট। 18. 96 $\sqrt{3}$ ফুট। 19. 69·6 ফু./সে, ; অনুভূমিক রেখার নিচে 73° 18′ কোণে, 50·6 ফুট। 20. 9600 $\sqrt{3}$ ফুট। 21. 12 $\sqrt{29}$ ফু./সে. ; অনুভূমিক তলের সহিত ট্যান$^{-1}$ $\frac{2}{5}$ কোণে। 22. 72 ফু. ; 15° ও 75°. 23. ট্যান$^{-1}$ $\frac{4}{3}$; 200 ফু./সে. ; 10 সে.।

অনুশীলনী ২৫

1. 2·5 রেডিয়ান। 2. 4 ফু./সে.। 3. 8·8 রেডিয়ান। 4. 30 ফু./সে.। 5. 3 ফুট। 6. 20 : 1. 7. 2 ফুট। 8. 12 ফু./সে.। 9. অক্ষটিকে কেন্দ্র করিয়া 12·37 ফুট ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের পরিধি।

অনুশীলনী ২৬

1. 4 ফু./সে. ; 8 পাউণ্ড্যাল। 2. $\frac{mv^2}{r}$. 3. 15 পাউণ্ড-ভার। 4. 35 গ্রা, ; $\frac{4}{7}$ রেডিয়ান/সে.। 5. 18 পাউণ্ড্যাল। 6. $3200\pi^2$ পাউণ্ড্যাল। 7. 210 গ্রাম, $\frac{4}{7}$ রেডিয়ান/সে.। 8. 210 গ্রাম। 9. 24 ফু./সে.। 10. 25 ফু./সে.। 11. 19·5 ফু./সে.। 12. প্রতি মিনিটে 35 পাক। 13. ·5 প্রায়। 14. 2·5 রেডিয়ান প্রায়। 15. 2 $\sqrt{2}$ রেডিয়ান/সে.। 17. ট্যান$^{-1}$ $\frac{1}{49}$. 18. 3·63 ই.।

অনুশীলনী ২৭

1. 15·5 ফু./সে. ; 24·5 ফু./সে.। 3. (i) 8 ফু./সে. ; (ii) 9 ফু./সে. ;

(iii) না। 4. (*a*) 880 ফুট ; (*b*) 1936 ফুট। 5. 24 ফুট ; 4 সেকেণ্ড।

14. $3\frac{2}{3}$ মাইল। 16. $\frac{2c}{(t+2t'+t'')t}$. 18. $3\frac{2}{3}$ সে. ; 4 ফু./সে^{2}

19. $(1 \pm \sqrt{2})$ সে.।

অনুশীলনী ২৮

1. 24·15 ফুট। 2. 38·7 ফু./সে.। 8. 11 তলায় ; 3·5 ফুট

9. 650 ফুট। 10. 53 ফুট। 11. 144 ফুট। 12. $\frac{8}{9}h$

13. $2\frac{3}{8}$ সেকেণ্ড।

অনুশীলনী ২৯

1. 50 পা.। 2. 9 : 16. 3. 204 পাউণ্ড। 4. $9\frac{3}{8}$ পা.।

5. 680 পা.। 6. 80 ফুট। 7. $37\frac{5}{8}$ টন। 8. 3168 গজ।

10. 12 : 1 ; 1 : 6. 11. 9 স্টোন ; 15 স্টোন ; 12 স্টোন।

13. $\frac{Wf}{g(g-f)}$. 14. 0. 15. 16 ফুট। 16. 16 ফুট। 18. $3\frac{1}{80}$ পা. ;

$110\frac{1}{2}$ পাউণ্ড্যাল ; 102 ও 103 পাউণ্ড্যাল। 20. $7\frac{1}{3}$ পা. ও 4 ফু $\frac{7}{8}$ পা.।

21. 1 সেকেণ্ড। 22. $5\frac{1}{3}$ ফু./সে^{2} ; 80 ও $106\frac{2}{3}$ পাউণ্ড্যাল।

23. 12 সেকেণ্ড। 24. 24 ফু./সে. সমবেগ। 25. 4 ফু./সে^{2} ; $5\frac{1}{4}$ পা. ;

$2\frac{4}{5}$ ফুট। 27. $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড। 28. 1 সেকেণ্ড।

29. (*a*) 5 পা. ; (*b*) $2\frac{1}{2}$ পা. ; (*c*) $3\frac{3}{4}$ পা.।

অনুশীলনী ৩০

1. $50\sqrt{3}$ পা. ; 50 পা.। 9. 120° 11. 16 পা. ; 12 পা.।

12. $2\frac{4}{5}$ পা. ; $9\frac{3}{5}$ পা.। 13. 5000 পা.।

অনুশীলনী ৩১

1. W.